Th.s Toán học – Ks Tin học LÊ HỒNG ĐỨC – Chủ biên
Nhà giáo ưu tú ĐÀO THIỆN KHẢI
LÊ BÍCH NGỌC
LÊ HỮU TRÍ

ĐỂ HỌC TỐT TOÁN 8

TẬP 1

- Với Học sinh cuốn sách này cung cấp một bộ giáo trình hoàn chỉnh về mặt kiến thức, dễ đọc, dễ hiểu.
- Với Thầy, Cô và Phụ huynh cuốn sách này cung cấp một bộ giáo án hoàn chỉnh về mặt kiến thức và có tính sư phạm để giảng dạy cơ bản và nâng cao theo tư tưởng đổi mới phương pháp dạy học

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

GIỚI THIỆU CHUNG

Xin trân trọng giới thiệu tới các Thầy, Cô giáo, các Phụ huynh, cùng toàn thể các Em học sinh bộ sách:

RÈN LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI TOÁN THCS

do Thạc sĩ Toán học Lê Hồng Đức chủ biên.

Bộ tài liệu gồm 9 cuốn.

Cuốn 1: Toán 6 Tập 1
Cuốn 2: Toán 6 Tập 2
Cuốn 3: Toán 7 Tập 1
Cuốn 4: Toán 7 Tập 2
Cuốn 5: Toán 8 Tập 1
Cuốn 6: Toán 8 Tập 2
Cuốn 7: Toán 9 Tập 1
Cuốn 8: Toán 9 Tập 2
Cuốn 9: 81 đề Toán mẫu luyện thi Tốt nghiệp THCS

Bộ sách được viết theo chương trình sách giáo khoa mới của Bộ Giáo dục và Đào tạo dựa trên một tư tưởng hoàn toàn mới mẻ, có tính sư phạm, có tính tổng hợp cao, tận dụng được đầy đủ thế mạnh của các phương pháp giải Toán THCS.

Mục tiêu của bộ sách:

1. *Cung cấp cho các Thầy, Cô giáo, các Phụ huynh một bộ giáo án có chất lượng về mặt sư phạm và chứa đựng đầy đủ kiến thức cơ bản cũng như chuyên sâu, để sau khi tham khảo có thể chuyển đổi ngay thành giáo án mang đi giảng dạy cho học sinh của mình.*

2. *Cung cấp cho các em học sinh THCS yêu thích môn Toán một bộ sách tự học tập dễ hiểu và bổ ích. Nó chắc chắn sẽ trở thành người bạn đồng hành để giúp các Em chủ động hơn trong việc học Toán theo chương trình sách giáo khoa và mở mang kiến thức Toán THCS của bản thân.*

Các cuốn Toán 6, Toán 7, Toán 8, Toán 9 đều có chung một cấu trúc, bao gồm hai phần:

Phần I - Đại số
Phần II - Hình học

Mỗi phần chứa đựng các chương (chương I, chương II, ...). Ở mỗi chương chứa đựng các chủ đề (chủ đề 1, chủ đề 2, ...) theo nội dung của sách giáo khoa.

Mỗi chủ đề đều được chia thành 5 mục:

I. ***Kiến thức cơ bản***

Trình bày có trật tự nội dung kiến thức liên quan (trong hầu hết các trường hợp chúng được bắt đầu bằng phương pháp đặt vấn đề) cùng với những thí dụ minh hoạ ngay sau đó.

II. ***Các ví dụ minh hoạ***

Gồm các ví dụ được tuyển chọn có chọn lọc nhằm giúp hoàn thiện kiến thức cơ bản và nâng cao kỹ năng giải Toán.

III. ***Câu hỏi ôn tập lý thuyết***

IV. ***Bài tập đề nghị***

V. ***Hướng dẫn - Đáp số***

Như vậy, ở mỗi chủ đề:

1. *Với việc trình bày kiến thức cơ bản theo kiểu đặt vấn đề, cùng thí dụ minh hoạ ngay sau đó, sẽ giúp tăng chất lượng bài giảng cho các Thầy, Cô giáo. Và với các em học sinh sẽ thấy dễ hiểu kiến thức mới để rồi biết cách trình bày bài. Điều này phù hợp với xu hướng giáo dục mới trong công cuộc cải cách phương pháp dạy và học theo hướng "* ***Lấy học trò làm trung tâm*** *"*
2. *Tiếp đó, tới các ví dụ minh hoạ có chọn lọc, sẽ giúp các Thầy, Cô giáo dẫn dắt các em học sinh hoàn thiện kiến thức.*
3. *Đặc biệt là nội dung của các* ***chú ý, nhận xét*** *và* ***yêu cầu*** *sau mỗi kiến thức cùng với một vài thí dụ và ví dụ sẽ giúp các Thầy, Cô giáo củng cố những hiểu biết chưa thật thấu đáo cho các em học sinh, cùng với cách nhìn nhận vấn đề đặt ra cho các em học sinh, để trả lời một cách thoả đáng câu hỏi "* ***Tại sao lại nghĩ và làm như vậy ?*** *".*
4. *Ngoài ra, còn có rất nhiều bài toán được giải bằng nhiều cách khác nhau sẽ giúp các học sinh trở nên linh hoạt trong việc lựa chọn phương pháp giải.*

Chúng tôi cũng xin trân trọng cảm ơn các bạn đồng nghiệp đã nhận lời đọc bản thảo, nhận lời tới dự giờ trong các tiết giảng thử của chúng tôi theo giáo trình này ở trên các lớp 6, 7, 8, 9 tại một số trường THCS của Hà Nội và từ đó đóng góp những nhận xét quí báu để giúp chúng tôi tới ngày hôm nay hoàn thiện được bộ sách này.

Cuối cùng, cho dù đã rất cố gắng, nhưng thật khó tránh khỏi những thiếu sót bởi những hiểu biết và kinh nghiệm còn hạn chế, rất mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu của bạn đọc gần xa. Mọi ý kiến đóng góp xin liên hệ tới:

Địa chỉ: Nhóm tác giả Cự Môn do Th.s Toán học Lê Hồng Đức phụ trách
Số 20 - Ngõ 86 - Đường Tô Ngọc Vân - Quận Tây Hồ - Hà Nội
Điện thoại: (04) 7196671 hoặc 0983046689
E-mail: cumon@hn.vnn.vn hoặc lehongduc39@yahoo.com.

Hà nội, ngày 18 tháng 12 năm 2004

Chủ biên LÊ HỒNG ĐỨC

MỤC LỤC

PHẦN II - HÌNH HỌC

CHƯƠNG I
TỨ GIÁC

CHƯƠNG II
ĐA GIÁC - DIỆN TÍCH ĐA GIÁC

Phần 1

Đại số

CHƯƠNG I - PHÉP NHÂN VÀ PHÉP CHIA CÁC ĐA THỨC

Chương này, bao gồm:

1. **Phương pháp nhân hai đa thức**
2. **Các hằng đẳng thức đáng nhớ và việc vận dụng chúng để giải toán**
3. **Các phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử**
4. **Phương pháp chia đa thức cho đa thức**

CHỦ ĐỀ 1

NHÂN ĐA THỨC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. NHÂN ĐƠN THỨC VỚI ĐA THỨC

Chúng ta đã biết cách nhân đơn thức với đơn thức, thí dụ:

$$(-3x^3y^2)(-5xy^3) = 15x^4y^5$$

Ta tiếp tục với phép nhân đơn thức 2x với đa thức $4x^2 - 3$, như sau:

$$2x.(4x^2 - 3) = \underbrace{\underbrace{2x.4x^2}_{\text{nhân 2x với } 4x^2} - \underbrace{2x.3}_{\text{nhân 2x với } -3}}_{\text{nhân 2x với từng hạng tử của } 4x^2 - 3} = \underbrace{8x^3 - 6x}_{\text{cộng các tích lại}}.$$

Vậy, phép nhân đơn thức A với đa thức $B_1 + B_2$ được minh hoạ bởi:

$$\mathbf{A(B_1 + B_2) = A.B_1 + A.B_2}$$

Quy tắc: ***Muốn nhân một đơn thức với một đa thức****, ta nhân đơn thức với từng hạng tử của đa thức rồi cộng các tích với nhau.*

Từ đó, ta có ngay công thức mở rộng:

$$\mathbf{A(B_1 + B_2 + ... + B_n) = A.B_1 + A.B_2 + ... + A.B_n}. \quad (1)$$

và vì phép nhân có tính giao hoán nên ta cũng có:

$$\mathbf{(B_1 + B_2 + ... + B_n)A = B_1.A + B_2.A + ... + B_n.A}. \quad (2)$$

Thí dụ 1: Thực hiện phép nhân:

a. $3x^2(x^2 - 3x + 2)$. b. $(2x^2 - y - 3xy).4xy^2$.

Giải

a. Sử dụng (1), ta có ngay:

$$3x^2(x^2 - 3x + 2) = 3x^2.x^2 - 3x^2.3x + 3x^2.2 = 3x^4 - 9x^3 + 6x^2.$$

b. Sử dụng (2), ta có ngay:

$$(2x^2 - y - 3xy).4xy^2 = 2x^2.4xy^2 - y.4xy^2 - 3xy.4xy^2$$
$$= 8x^3y^2 - 4xy^3 - 12x^2y^3.$$

Chú ý: Khi thực hiện phép nhân, cần chú ý đến dấu của từng đơn thức tham gia ở mỗi phép toán để đặt dấu " + " hoặc dấu " –" cho thích hợp.

Thí dụ 2: Thực hiện phép tính:

a. $(x^3 + 3x^2y - 2xy^2).(-3x^2y)$. b. $2x^3 - 6x^2 - 2x(x^2 - 3x + 2)$.

Giải

a. Ta có ngay:

$$(x^3 + 3x^2y - 2xy^2).(-3x^2y) = x^3.(-3x^2y) + 3x^2y.(-3x^2y) - 2xy^2.(-3x^2y)$$
$$= -3x^5y - 9x^4y^2 + 6x^3y^3.$$

b. Ta có ngay:

$$2x^3 - 6x^2 - 2x(x^2 - 3x - 2) = 2x^3 - 6x^2 - 2x^3 + 6x^2 + 4x = 4x.$$

Nhận xét: 1. Trong câu b) cần lưu ý đến thứ tự thực hiện phép tính:

- Trước hết phải nhân đơn thức $-2x$ với đa thức $x^2 - 3x + 2$.
- Sau đó thực hiện phép cộng đa thức.

2. Có hai cách xét các phép tính ở biểu thức b), cụ thể:

- Xét biểu thức là hiệu của $2x^3 - 6x^2$ và $x^2 - 3x + 2$
- Hoặc xét biểu thức là tổng của $2x^3 - 6x^2$ và $2x.(x^2 - 3x + 2)$.

Lời giải theo cách này gọn hơn.

2. NHÂN ĐA THỨC VỚI ĐA THỨC

Ta bắt đầu với phép nhân đa thức $2x + y$ với đa thức $2x - y$, như sau:

$$(2x + y)(2x - y) = \underbrace{\underbrace{2x.(2x - y)}_{\text{nhân } 2x \text{ với } 2x - y} + \underbrace{y.(2x - y)}_{\text{nhân } y \text{ với } 2x - y}}_{\text{nhân mỗi hạng tử của đa thức } 2x + y \text{ với đa thức } 2x - y}$$

$$= \underbrace{4x^2 - 2xy + 2xy - y^2}_{\text{thực hiện phép nhân đơn thức với đa thức}} = \underbrace{4x^2 - y^2}_{\text{cộng các tích lại}}.$$

Vậy, phép nhân đa thức $A_1 + A_2$ với đa thức $B_1 + B_2$ được minh hoạ bởi:

$$\begin{aligned}(A_1 + A_2)(B_1 + B_2) &= A_1.(B_1 + B_2) + A_2.(B_1 + B_2)\\ &= A_1.B_1 + A_1.B_2 + A_2.B_1 + A_2.B_2\end{aligned}$$

Quy tắc: ***Muốn nhân một đa thức với một đa thức***, *ta nhân mỗi hạng tử của đa thức này với từng hạng tử của đa thức kia rồi cộng các tích với nhau (tại đây thông thường cần thực hiện phép rút gọn).*

Thí dụ 3: Thực hiện phép nhân:

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2).$$

Giải

Ta có ngay:

$$\begin{aligned}(x + y)(x^2 - xy + y^2) &= x.(x^2 - xy + y^2) + y(x^2 - xy + y^2)\\ &= x^3 - x^2y + xy^2 + yx^2 - xy^2 + y^3 = x^3 + y^3.\end{aligned}$$

Chú ý: Như vậy, ví dụ trên còn có thể được phát biểu dưới dạng:

" *Chứng minh rằng $(x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$* "

và để thực hiện yêu cầu này chúng ta đi biến đổi vế trái thành vế phải bằng phép nhân đa thức với đa thức.

Thí dụ 4: Thực hiện phép nhân:

$$(3x - 5)(2x + 11) - (2x + 3)(3x + 7).$$

Giải

Ta có ngay:

$$(3x - 5)(2x + 11) - (2x + 3)(3x + 7) =$$
$$= 3x.(2x + 11) - 5.(2x + 11) - 2x.(3x + 7) - 3.(3x + 7)$$
$$= 6x^2 + 33x - 10x - 55 - 6x^2 - 14x - 9x - 21 = 76.$$

Chú ý: 1. Để thực hiện phép nhân trên chúng ta cần hết sức chú ý tới việc đặt dấu " + " hoặc dấu " - " cho thích hợp.

2. Như vậy, nội dung của thí dụ trên còn có thể được phát biểu dưới dạng:

" *Chứng minh rằng biểu thức*

$$(3x - 5)(2x + 11) - (2x + 3)(3x + 7)$$

không phụ thuộc vào x "

và để thực hiện yêu cầu này chúng ta đi biến đổi biểu thức bằng phép nhân đa thức với đa thức.

Thí dụ 5: Thực hiện phép nhân:

$$3(x - 1)(x - 2) - x(3x + 1)(1 - x).$$

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách thực hiện:

Cách 1: Ta có:

$$3(x - 1)(x - 2) - x(3x + 1)(1 - x) = 3(x^2 - 2x - x + 2) - x(3x - 3x^2 + 1 - x)$$
$$= 3x^2 - 6x - 3x + 6 - 3x^2 + 3x^3 - x + x^2$$
$$= 3x^3 + x^2 - 10x + 6.$$

Cách 2: Ta có:

$$3(x - 1)(x - 2) - x(3x + 1)(1 - x) = (3x - 3)(x - 2) - (3x^2 + x)(1 - x)$$
$$= 3x^2 - 6x - 3x + 6 - 3x^2 + 3x^3 - x + x^2$$
$$= 3x^3 + x^2 - 10x + 6.$$

Nhận xét: ở thí dụ này, để nhân ba đơn thức, đa thức ta thấy:

1. Trong *cách 1* ta nhân hai đa thức với nhau trước, sau đó nhân kết quả với đơn thức.

2. Trong *cách 2* ta nhân đơn thức với đa thức trước, sau đó nhân hai đa thức với nhau.

3. NHÂN HAI ĐA THỨC MỘT BIẾN ĐÃ SẮP XẾP

Để minh hoạ quy tắc" *Nhân hai đa thức một biến đã sắp xếp* ", chúng ta hãy bắt đầu với phép nhân đa thức $P = x^2 - 3x + 2$ với $Q = 2x + 3$.

Ta viết:

$$\begin{array}{rrrrl}
\times & & x^2 & -3x+2 & \\
 & & & 2x+3 & \Big\} \longrightarrow \text{Đa thức P và Q được viết trên hai dòng} \\
 & & 3x^2 & -9x+6 & \longrightarrow \text{Kết quả phép nhân 3 với đa thức } x^2-3x+2 \\
+ & 2x^3 & -6x^2 & +4x & \longrightarrow \text{Kết quả phép nhân 2x với đa thức } x^2-3x+2 \\
\hline
 & 2x^3 & -3x^2 & -5x+6 & \longrightarrow \text{Cộng theo từng cột}
\end{array}$$

Vậy, ta được:

$$P.Q = (x^2 - 3x + 2)(2x + 3) = 2x^3 - 3x^2 - 5x + 6.$$

Quy tắc: ***Muốn nhân hai đa thức một biến đã sắp xếp***, ta trình bày như sau:

- *Đa thức nọ viết dưới đa thức kia.*
- *Kết quả của phép nhân mỗi số hạng của đa thức thứ hai với đa thức thứ nhất được viết riêng trong một dòng.*
- *Các đơn thức đồng dạng được xếp vào cùng một cột.*
- *Cộng theo từng cột.*

Chú ý: Vì đây là các đa thức đã được sắp xếp, do đó nếu có tình trạng khuyết một hoặc nhiều bậc trung gian nào đó thì lúc viết vào phép nhân phải để trống một khoảng ứng với bậc khuyết ấy, để minh hoạ chúng ta xét thí dụ sau:

Thí dụ 6: Thực hiện phép nhân hai đa thức:

$$P = 2x^3 - x + 1 \text{ và } Q = x^2 + 1.$$

Giải

Ta viết:

$$\begin{array}{rrrrrrr}
\times & & 2x^3 & & -x & +1 \\
 & & & x^2 & & +1 \\
\hline
+ & & 2x^3 & & -x & +1 \\
 & 2x^5 & -x^3 & +x^2 & & \\
\hline
 & 2x^5 & +x^3 & +x^2 & -x & +1
\end{array}$$

Vậy, ta được:

$$P.Q = (2x^3 - x + 1)(x^2 + 1) = 2x^5 + x^3 + x^2 - x + 1.$$

Chú ý: Nếu đa thức có nhiều biến, ta có thể chọn một biến làm biến chính và sắp xếp theo biến ấy, thí dụ đa thức $x^2 + y^2 + xy$ khi được sắp xếp theo luỹ thừa giảm của x sẽ là $x^2 + xy + y^2$, từ đó áp dụng phương pháp trên để nhân hai đa thức, ví dụ sau sẽ minh hoạ ý tưởng này.

Thí dụ 7: Thực hiện phép nhân hai đa thức:

$$P = x^2 - y^2 + 2xy \text{ và } Q = x + y.$$

Giải

Ta viết:

$$\begin{array}{rr} \times & x^2 + 2xy - y^2 \\ & x + y \\ \hline + & x^2y + 2xy^2 - y^3 \\ & x^3 + 2x^2y - xy^2 \quad\quad \\ \hline & x^3 + 3x^2y + xy^2 - y^3 \end{array}$$

Vậy, ta được:

$$P.Q = (x^2 - y^2 + 2xy)(x + y) = x^3 + 3x^2y + xy^2 - y^3.$$

II. CÁC VÍ DỤ SỬ DỤNG PHÉP NHÂN ĐA THỨC

Ví dụ 1: Thực hiện phép nhân:

a. $3x(x + 4y) - (15y - 10x).\frac{4}{5}y.$

b. $(x^2y - 2xy)(x^2 + xy - y^2).$

c. $(1 + x - 3x^2)(x^2 - 5 + x).$

Giải

a. Ta có ngay:

$$3x(x + 4y) - (15y - 10x).\frac{4}{5}y = 3x^2 + 12xy - 12y + 8xy$$
$$= 3x^2 + 20xy - 12y.$$

b. Ta có ngay:

$$(x^2y - 2xy)(x^2 + xy - y^2) = x^2y.(x^2 + xy - y^2) - 2xy.(x^2 + xy - y^2)$$
$$= x^4y + x^3y^2 - x^2y^3 - 2x^3y - 2x^2y^2 + 2xy^3$$

c. Ta có thể lựa chọn hai cách trình bày:

Cách 1: Ta có:

$$(1 + x - 3x^2)(x^2 - 5 + x)$$
$$= 1.(x^2 - 5 + x) + x.(x^2 - 5 + x) - 3x^2.(x^2 - 5 + x)$$
$$= x^2 - 5 + x + x^3 - 5x + x^2 - 3x^4 + 15x^2 - 3x^3$$
$$= -3x^4 - 2x^3 + 17x^2 - 4x - 5.$$

Cách 2: Ta có:

$$\begin{array}{rr} \times & -3x^2 + x + 1 \\ & x^2 + x - 5 \\ \hline & 15x^2 - 5x - 5 \\ + & -3x^3 + x^2 + x \quad\quad \\ & -3x^4 + x^3 + x^2 \quad\quad\quad\quad \\ \hline & -3x^4 - 2x^3 + 17x^2 - 4x - 5 \end{array}$$

Vậy, ta được:

$$(1 + x - 3x^2)(x^2 - 5 + x) = -3x^4 - 2x^3 + 17x^2 - 4x - 5.$$

Ví dụ 2: Cho hai đa thức:

$$A = xy^2 + x^2y + x^3 + y^3 \text{ và } B = x - y.$$

Sắp xếp hai đa thức A và B theo thứ tự luỹ thừa giảm của biến x rồi nhân chúng theo cách nhân hai đa thức đã sắp xếp:

Giải

Sắp xếp theo luỹ thừa giảm của biến x:

$A = x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$,

$B = x - y$.

Đặt phép nhân:

$$\begin{array}{r} x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 \\ x - y \\ \hline -x^3y - x^2y^2 - xy^3 - y^4 \\ x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 \quad\quad \\ \hline x^4 \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad - y^4 \end{array}$$

Ví dụ 3: Chứng minh rằng biểu thức $n(3n - 1) - 3n(n - 2)$ luôn chia hết cho 5 với mọi số nguyên n.

Giải

Ta biến đổi biểu thức về dạng:

$n(3n - 1) - 3n(n - 2) = 3n^2 - n - 3n^2 + 6n = 5n$

điều đó khẳng định biểu thức luôn chia hết cho 5 với mọi số nguyên n.

Nhận xét: Trong ví dụ trên, bằng việc sử dụng phép nhân đa thức với đa thức chúng ta đã thực hiện việc đơn giản biểu thức ban đầu để rồi khẳng định được tính chia hết của nó.

Ví dụ 4: Cho a, b là hai số tự nhiên, biết a chia cho 3 dư 2, b chia cho 3 dư 1. Chứng minh rằng a.b chia cho 3 dư 2.

Giải

Ta có:

- Vì a chia cho 3 dư 2, nên $a = 3p + 2$, $p \in \mathbf{N}$.
- Vì b chia cho 3 dư 1, nên $b = 3q + 1$, $q \in \mathbf{N}$.

Từ đó, suy ra:

$a.b = (3p + 2)(3q + 1) = 9pq + 3p + 6q + 2$

do đó, a.b chia cho 3 dư 2.

Nhận xét: Trong ví dụ trên, chúng ta đã sử dụng kết quả:

" *Nếu a chia cho b dư c thì a = kb + c* ".

Ví dụ 5: Thực hiện phép nhân, rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức:

$$P = (x^2 + y^2)(x^2y + y^3) - y(x^4 + y^4), \text{ với } x = \frac{1}{2} \text{ và } y = -3.$$

Giải

Thực hiện phép nhân, ta được :

$P = x^2.(x^2y + y^3) + y^2.(x^2y + y^3) - yx^4 - y^5$

$= x^4y + x^2y^3 + x^2y^3 + y^5 - yx^4 - y^5 = 2x^2y^3$.

Khi đó, với $x = -\frac{1}{2}$ và $y = 3$ ta nhận được:

$$P = 2.\left(-\frac{1}{2}\right)^2.3^3 = \frac{27}{2}.$$

Nhận xét: Ví dụ trên thường chỉ được phát biểu dưới dạng:

" *Tính giá trị của biểu thức P với $x = -\frac{1}{2}$ và y = 3* "

Khi đó, chúng ta cần hiểu rằng phải thực hiện theo các bước:

Bước 1: Rút gọn biểu thức.

Bước 2: Thay giá trị tương ứng của các biến, từ đó nhận được giá trị của biểu thức.

Ví dụ 6: Tìm x, biết:

$$(3x - 4)(2x + 1) - (6x + 5)(x - 3) = 3. \quad (1)$$

Giải

Ta có:

$$(3x - 4)(2x + 1) - (6x + 5)(x - 3)$$
$$= 3x.(2x+1) - 4.(2x+1) - 6x(x - 3) - 5(x - 3)$$
$$= 6x^2 + 3x - 8x - 4 - 6x^2 + 18x - 5x + 15$$
$$= 8x + 11.$$

Khi đó (1) có dạng:

$$8x + 11 = 3 \Leftrightarrow 8x = -8 \Leftrightarrow x = -1.$$

Vậy, x = –1 thoả mãn điều kiện đầu bài.

Nhận xét: Như vậy, việc sử dụng phép nhân đa thức với đa thức cho phép chúng ta giải được phương trình.

Ví dụ 7: Chứng minh rằng:

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3.$$

Giải

Ta có ngay:

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x.(x^2 + xy + y^2) - y(x^2 + xy + y^2)$$
$$= x^3 + x^2y + xy^2 - yx^2 - xy^2 - y^3 = x^3 - y^3.$$

Nhận xét: Như vậy, việc sử dụng phép nhân đa thức với đa thức cho phép chúng ta chứng minh được đẳng thức.

Ví dụ 8: Chứng minh rằng biểu thức P không phụ thuộc vào x, biết:

$$P = (3x + 2)(2x - 1) - 6x(x - 1) - 7x + 4.$$

Giải

Ta có:

$$P = 3x.(2x - 1) + 2.(2x - 1) - 6x^2 + 6x - 7x + 4$$
$$= 6x^2 - 3x + 4x - 2 - 6x^2 - x + 4 = 2.$$

Vậy, biểu thức P không phụ thuộc vào x.

Ví dụ 9: Tìm ba số tự nhiên chẵn liên tiếp, biết tích của hai số sau lớn hơn tích của hai số đầu là 24.

Giải

Ba số tự nhiên chẵn liên tiếp luôn có dạng:

$$2n,\ 2n + 2,\ 2n + 4.$$

Từ giả thiết, ta được điều kiện:

$$(2n + 2)(2n + 4) - 2n(2n + 2) = 24$$

$$\Leftrightarrow 2n.(2n + 4) + 2.(2n + 4) - 4n^2 - 4n = 24$$

$$\Leftrightarrow 4n^2 + 8n + 4n + 8 - 4n^2 - 4n = 24 \Leftrightarrow 8n = 16 \Leftrightarrow n = 2.$$

Vậy, ba số tự nhiên chẵn liên tiếp cần tìm là 4, 6, 8.

Chú ý: Các em học sinh cần nhớ rằng:

- Ba số tự nhiên liên tiếp luôn có dạng:

  $n, n + 1, n + 2$ hoặc $n - 1, n, n + 1$

- Ba số tự nhiên chẵn liên tiếp luôn có dạng:

  $2n, 2n + 2, 2n + 4$ hoặc $2n - 2, 2n, 2n + 2$

- Ba số tự nhiên lẻ liên tiếp luôn có dạng:

  $2n + 1, 2n + 3, 2n + 5$ hoặc $2n - 1, 2n + 1, 2n + 3$

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Đơn thức là gì ? Cho ví dụ.

Câu hỏi 2: Đa thức là gì ? Cho ví dụ.

Câu hỏi 3: Phát biểu quy tắc nhân đơn thức với đa thức

Câu hỏi 4: Phát biểu quy tắc nhân đa thức với đa thức

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Thực hiện phép nhân:

a. $4x(3x - 1) - 2(3x + 1) - (x + 3)$.

b. $(2x^2 - \frac{1}{3}xy + 2y^2)(-\frac{1}{2}x^2y)$.

Bài tập 2. Thực hiện phép nhân:

a. $3x(4x - 3) - (2x - 1)(6x + 5)$.

b. $4x(3x^2 - x) - (2x + 3)(6x^2 - 3x + 1)$.

c. $(x - 2)(x + 2)(x + 4)$.

d. $[(x^2 - 2xy + 2y^2)(x + 2y) - (x^3 + 4y^3)].(-3xy)$.

Bài tập 3. Thực hiện phép tính:

a. $6x^n(x^2 - 1) + 2x(3x^{n-1} + 1)$.

b. $3x^{n-2}(x^{n+2} - y^{n+2}) + y^{n+2}(3x^{n-2} - y^{n-2})$.

c. $4^{n+1} - 3.4^n$.

d. $6^2.3^8.2^8 - 6^5(6^5 - 1)$.

Bài tập 4. Rút gọn biểu thức rồi tính giá trị của biểu thức với $x = -\frac{3}{2}$.

$$P = 3x^2 - [2x^2 - 3x(x - 4)].$$

Bài tập 5. Chứng minh rằng:

a. $(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$.

b. $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

c. $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$.

d. $(x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$.

e. $(x - y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3) = x^4 - y^4$.

Bài tập 6. Tìm x, biết:

a. $3(2x - 3) + 2(2 - x) = -3$.

b. $2x(x^2 - 2) + x^2(1 - 2x) - x^2 = -12$.

Bài tập 7. Tìm x, biết:

a. $3x(2x + 3) - (2x + 5)(3x - 2) = 8$.

b. $4x(x - 1) - 3(x^2 - 5) - x^2 = (x - 3) - (x + 4)$.

c. $2(3x - 1)(2x + 5) - 6(2x - 1)(x + 2) = -6$.

d. $3(2x - 1)(3x - 1) - (2x - 3)(9x - 1) - 3 = -3$.

e. $(3x - 1)(2x + 7) - (x + 1)(6x - 5) = (x + 2) - (x - 5)$.

f. $3xy(x + y) - (x + y)(x^2 + y^2 + 2xy) + y^3 = 27$.

Bài tập 8. Chứng minh rằng giá trị của các biểu thức sau không phụ thuộc vào x:

a. $A = 2x(x - 1) - x(2x + 1) - (3 - 3x)$.

b. $B = 2x(x - 3) - (2x - 2)(x - 2)$.

c. $C = (3x - 5)(2x + 11) - (2x + 3)(3x + 7)$.

d. $D = (2x + 11)(3x - 5) - (2x + 3)(3x + 7)$.

Bài tập 9. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào y:

$$P = (2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2) + y^3.$$

Bài tập 10. Sắp xếp các đa thức rồi thực hiện phép nhân:

a. $(3x - 2 + x^2)(2 - 3x)$.

b. $(x - 3x^2 - 5 + 2x^3)(2x + 1)$.

c. $(1 + 2x^3 - x)(x^2 - 3 + 2x)$.

d. $(x^3 + 1 - 3x)(2x^2 + 3)$.

e. $(5x - 2x^2 + 3)(2x^2 - 3)$.

f. $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$.

g. $(x + 2)(4x^2 - 2x^3 - 8x + x^4 + 16)$.

Bài tập 11. Sắp xếp đa thức theo một biến chính rồi làm phép nhân:

$$(x - y)(y^4 + x^2y^2 + xy^3 + x^3y + x^4).$$

Bài tập 12. Chứng minh rằng biểu thức $n(2n + 5) - 2n(n - 2)$ luôn chia hết cho 9 với mọi số nguyên n.

Bài tập 13. Cho a, b là hai số tự nhiên, biết a chia cho 5 dư 1, b chia cho 5 dư 2. Chứng minh rằng a.b chia cho 5 dư 2.

Bài tập 14. Tìm ba số tự nhiên liên tiếp, biết tích của hai số sau lớn hơn tích của hai số đầu là 50.

Bài tập 15. Cho bốn số tự nhiên liên tiếp. Biết rằng tích của hai số đầu nhỏ hơn tích của hai số cuối là 34. Tìm bốn số tự nhiên ấy.

Bài tập 16. Chứng minh rằng với mọi a, b, c luôn có:

$$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$$

Bài tập 17.

a. Chứng minh rằng:

$$(a + b + c)(ab + bc + ca) - abc = (a + b)(b + c)(c + a).$$

b. Áp dụng chứng minh rằng nếu $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a + b + c}$ thì

$$\frac{1}{a^{2n+1}} + \frac{1}{b^{2n+1}} + \frac{1}{c^{2n+1}} = \frac{1}{a^{2n+1} + b^{2n+1} + c^{2n+1}} \text{ với } \forall n \in N.$$

Bài tập 18. Biết $x = a^2 - bc$, $y = b^2 - ac$, $z = c^2 - ab$. Chứng minh rằng:

$$(x + y + z)(a + b + c) = ax + by + cz.$$

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. Ta được:

$$4x(3x - 1) - 2(3x + 1) - (x + 3) = 12x^2 - 11x - 5.$$

b. Ta được:

$$(2x^2 - \frac{1}{3}xy + 2y^2)(-\frac{1}{2}x^2y) = -x^4y + \frac{1}{6}x^3y^2 - x^2y^3.$$

Bài tập 2.

a. Ta được:

$$3x(4x - 3) - (2x - 1)(6x + 5) = -13x + 5.$$

b. Ta được:

$$4x(3x^2 - x) - (2x + 3)(6x^2 - 3x + 1) = -16x^2 + 7x - 3.$$

c. Ta được:

$$(x - 2)(x + 2)(x + 4) = x^3 + 4x^2 - 4x - 16$$

d. Ta được:

$$[(x^2 - 2xy + 2y^2)(x + 2y) - (x^3 + 4y^3)].(-3xy) = 6x^2y^3.$$

Bài tập 3.

a. Ta được:

$$6x^n(x^2 - 1) + 2x(3x^{n-1} + 1) = 6x^{n+2} + 2x.$$

b. Ta được:

$$3x^{n-2}(x^{n+2} - y^{n+2}) + y^{n+2}(3x^{n-2} - y^{n-2}) = 3x^{2n} - y^{2n}.$$

c. Ta được:

$$4^{n+1} - 3.4^n = 4.4^n - 3.4^n = 4^n.$$

d. Ta được:

$$6^2.3^8.2^8 - 6^5(6^5 - 1) = 7776.$$

Bài tập 4. Ta được:

$$P = 4x^2 - 12x.$$

Khi đó, với $x = -\dfrac{3}{2}$, ta được $P = 27$.

Bài tập 5.

a. Ta có:

$$(x - y)(x + y) = x(x + y) - y(x + y) = x^2 + xy - yx - y^2$$
$$= x^2 - y^2, \text{ đpcm.}$$

b. Ta có:

$$(x + y)^2 = (x + y)(x + y) = x(x + y) + y(x + y) = x^2 + xy + yx + y^2$$
$$= x^2 + 2xy + y^2, \text{ đpcm.}$$

c. Ta có:

$$(x - y)^2 = (x - y)(x - y) = x(x - y) - y(x - y) = x^2 - xy - yx + y^2$$
$$= x^2 - 2xy + y^2, \text{ đpcm.}$$

d. Ta có:

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) = x(x^2 - xy + y^2) + y(x^2 - xy + y^2)$$
$$= x^3 - x^2y + xy^2 + yx^2 - xy^2 + y^3$$
$$= x^3 + y^3, \text{ đpcm.}$$

e. Ta có:

$$(x - y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3) = x(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3) - y(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3)$$
$$= x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 - yx^3 - x^2y^2 - xy^3 + y^4$$
$$= x^4 - y^4, \text{ đpcm.}$$

Bài tập 6.

a. Ta có:

$$3(2x - 3) + 2(2 - x) = 4x - 5.$$

Do đó, ta có:

$$4x - 5 = -3 \Leftrightarrow 4x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Vậy, $x = \frac{1}{2}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. Ta có:

$$2x(x^2 - 2) + x^2(1 - 2x) - x^2 = -4x.$$

Do đó, ta có:

$$-4x = -12 \Leftrightarrow x = 3.$$

Vậy, x = 3 thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 7.

a. $x = 1$.

b. $x = \frac{11}{2}$.

c. $x = -1$.

d. $x = 0$.

e. $x = \frac{1}{2}$.

f. $x = -3$.

Bài tập 8.

a. $A = 3$.

b. $B = -4$.

c. $C = -76$.

d. $D = -76$.

Bài tập 9. Ta được $P = 8x^3$.

Bài tập 10. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 11. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 12. Ta có:

$$n(2n + 5) - 2n(n - 2) = 9n$$

do đó, nó luôn chia hết cho 9 với mọi số nguyên n.

Bài tập 13. Ta có:

- Vì a chia cho 5 dư 1, nên $a = 5p + 1$, $p \in \mathbf{N}$.
- Vì b chia cho 5 dư 2, nên $b = 5q + 2$, $q \in \mathbf{N}$.

Từ đó, suy ra:

$$a.b = (5p + 1)(5q + 2) = 25pq + 10p + 5q + 2$$

do đó, a.b chia cho 5 dư 2.

Bài tập 14. Ba số tự nhiên liên tiếp luôn có dạng:

$$n - 1, n, n + 1.$$

Từ giả thiết, ta được điều kiện:

$$n(n + 1) - n(n - 1) = 50 \Leftrightarrow 2n = 50 \Leftrightarrow n = 25.$$

Vậy, ba số tự nhiên liên tiếp cần tìm là 24, 25, 26.

CHỦ ĐỀ 2 CÁC HẰNG ĐẲNG THỨC ĐÁNG NHỚ

ĐẶT VẤN ĐỀ

Chúng ta bắt đầu với yêu cầu thực hiện phép tính:

$$\underbrace{(\underbrace{x}_{\text{Đặt là A}} - \underbrace{2}_{\text{Đặt là B}})}_{A-B}\underbrace{(\underbrace{x}_{\text{Đặt là A}} + \underbrace{2}_{\text{Đặt là B}})}_{A+B} = x(x+2) - 2(x+2)$$

$$= x^2 + 2x - 2x - 4$$

$$= \underbrace{x^2 - 4}_{A^2 - B^2}$$

$$\underbrace{(\underbrace{2x^2}_{\text{Đặt là A}} - \underbrace{x}_{\text{Đặt là B}})}_{A-B}\underbrace{(\underbrace{2x^2}_{\text{Đặt là A}} + \underbrace{x}_{\text{Đặt là B}})}_{A+B} = 2x^2(2x^2+x) - x(2x^2+x)$$

$$= 4x^4 + 2x^3 - 2x^3 - x^2$$

$$= \underbrace{4x^4 - x^2}_{A^2 - B^2}$$

như vậy ở cả hai lần chúng ta đều thực hiện phép tính có dạng :

$$(A - B)(A + B)$$

và kết quả thu được đều là $A^2 - B^2$, từ đó nảy sinh câu hỏi:

" *Tại sao không ghi nhận đẳng thức*

$$(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$$

để việc tính toán được đơn giản hơn ? ",

cụ thể, ta sẽ có ngay:

$$(x - 2)(x + 2) = x^2 - 2^2 = x^2 - 4$$

$$(2x^2 - x)(2x^2 + x) = (2x^2)^2 - x^2 = 4x^4 - x^2.$$

Xuất phát từ thực tiễn đó, ta ghi nhận 7 hằng đẳng thức đáng nhớ sau:

Bình phương của một tổng	$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
Bình phương của một hiệu	$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
Hiệu hai bình phương	$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$
Lập phương của một tổng	$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$
Lập phương của một hiệu	$(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$
Tổng hai lập phương	$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$
Hiệu hai lập phương	$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$

Yêu cầu: 1. Các em học sinh hãy chứng minh các hằng đẳng thức trên, thí dụ như để chứng minh :

$$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

ta biến đổi:

$$VT = (A - B)^2 = (A - B)(A - B) = A(A - B) - B(A - B)$$
$$= A^2 - AB - AB + B^2 = A^2 - 2AB + B^2, \text{ dpcm.}$$

2. Các em học sinh hãy phát biểu các hằng đẳng thức trên bằng lời, thí dụ:

- Với $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ đọc là " *Bình phương của một tổng hai biểu thức bằng bình phương biểu thức thứ nhất cộng hai lần tích biểu thức thứ nhất với biểu thức thứ hai cộng bình phương biểu thức thứ hai* ".
- Với $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$ đọc là " *Hiệu hai lập phương bằng hiệu hai biểu thức nhân với bình phương thiếu của tổng hai biểu thức đó* "

Lưu ý rằng ta có qui ước gọi:

$A^2 + AB + B^2$ là bình phương thiếu của tổng $A + B$.

$A^2 - AB + B^2$ là bình phương thiếu của hiệu $A - B$.

3. Các em học sinh cần học thuộc 7 hằng đẳng thức đáng nhớ trên để có thể:

- Phát biểu bằng lời các hằng đẳng thức đó.
- Nếu có biểu thức VT (vế trái) sẽ viết ra được biểu thức VP (vế phải) và vừa viết vừa phát biểu thành lời.
- Nếu có biểu thức VP sẽ viết ra được biểu thức VT và vừa viết vừa phát biểu thành lời.
- Khôi phục được những biểu thức về hằng đẳng thức bị khuyết, thí dụ:

$$(\ldots - B)^2 = \ldots - 2AB + \ldots$$

Điền A

Điền A^2

Điền B^2

Hằng đẳng thức 1

BÌNH PHƯƠNG CỦA MỘT TỔNG

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Ta có:

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

Đọc là " *Bình phương của một tổng hai biểu thức bằng bình phương biểu thức thứ nhất cộng hai lần tích biểu thức thứ nhất với biểu thức thứ hai cộng bình phương biểu thức thứ hai* ".

Để chứng minh hằng đẳng thức, ta thực hiện phép biến đổi:

$$VT = (A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A(A + B) + B(A + B)$$
$$= A^2 + AB + AB + B^2 = A^2 + 2AB + B^2, \text{ đpcm.}$$

Trong nhiều trường hợp, ta sử dụng công thức:

$$(A + B)^2 = (A - B)^2 + 4AB$$

thí dụ với yêu cầu " *Tính giá trị của $(A + B)^2$ biết $A - B = p$ và $AB = q$* ".

Mở rộng:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$
$$(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2bc + 2cd + 2da$$

tương tự như vậy, ta có thể khai triển bình phương của một tổng 5, 6, 7,..., n số hạng.

II. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1:

a. Tính $(2x + \frac{3}{4}y^2)^2$.

b. Tính nhẩm 101^2.

Giải

a. Ta có:

$$(2x + \frac{3}{4}y^2)^2 = (2x)^2 + 2.2x.\frac{3}{4}y^2 + (\frac{3}{4}y^2)^2 = 4x^2 + 3xy^2 + \frac{9}{16}y^4.$$

b. Ta có:

$$101^2 = (100 + 1)^2 = 100^2 + 2.100 + 1 = 10201.$$

Ví dụ 2:

a. Tính $(10a + 5)^2$.

b. Hãy chỉ ra ứng dụng của khai triển trên.

Giải

a. Ta có:

$$(10a + 5)^2 = 100a^2 + 100a + 25.$$

b. Nếu ta viết tiếp:

$$(10a + 5)^2 = 100a(a + 1) + 25. \quad (*)$$

Từ (*) ta nhận thấy:

- Vế trái là bình phương của một số có tận cùng bởi chữ số 5 với số hàng chục bằng a.
- Vế trái cho thấy, để có kết quả ta chỉ cần tính a(a + 1) rồi viết tiếp số 25 vào bên phải.

Yêu cầu: Các em học sinh hãy vận dụng kiến thức trong ví dụ trên để tính nhẩm $15^2, 25^2, 35^2, 45^2, 55^2, 65^2, 75^2, 85^2, 95^2$.

Ví dụ 3: Viết các biểu thức sau dưới dạng bình phương của một tổng:

a. $\frac{1}{4}x^2 + x + 1$.

b. $(x^2 + 4x + 4) + 2(x + 2) + 1$.

c. $x^2 + 4y^2 + 2(3x + 6y + 2xy) + 9$.

Giải

a. Ta có:

$$\frac{1}{4}x^2 + x + 1 = (\frac{1}{2}x)^2 + 2.(\frac{1}{2}x).1 + 1^2 = (\frac{1}{2}x + 1)^2.$$

b. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Ta biến đổi:

$$(x^2 + 4x + 4) + 2(x + 2) + 1 = (x + 2)^2 + 2(x + 2) + 1$$
$$= (x + 2 + 1)^2 = (x + 3)^2.$$

Cách 2: Ta biến đổi:

$$(x^2 + 4x + 4) + 2(x + 2) + 1 = x^2 + 4x + 4 + 2x + 4 + 1$$
$$= x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2.$$

c. Ta có:

$$x^2 + 4y^2 + 2(3x + 6y + 2xy) + 9 = (x^2 + 4xy + 4y^2) + 2(3x + 6y) + 9$$
$$= (x + 2y)^2 + 2.3(x + 2y) + 3^2$$
$$= [(x + 2y) + 3]^2 = (x + 2y + 3)^2.$$

Ví dụ 4: Hãy khôi phục lại những hằng đẳng thức sau:

a. $... + 6xy + 9y^2 = (x + ...)^2$.

b. $x^2 + ... + 4y^2 = (... + ...)^2$.

c. $4x^2 + xy + ... = (... + ...)^2$.

Giải

a. Ta có:

Suy ra B = 3y

$$... + 6xy + 9y^2 = (x + ...)^2 \Leftrightarrow ... + 2.x.3y + (3y)^2 = (x + ...)^2$$

Suy ra A = x

$$\Rightarrow x^2 + 6xy + 9y^2 = (x + 3y)^2.$$

b. Ta có:

Suy ra B = 2y

$$x^2 + ... + 4y^2 = (... + ...)^2 \Leftrightarrow x^2 + ... + (2y)^2 = (... + ...)^2$$

Suy ra A = x

$$\Rightarrow x^2 + 4xy + 4y^2 = (x + 2y)^2.$$

c. Ta có:

Suy ra $B = \frac{1}{4}y$

$$4x^2 + xy + ... = (... + ...)^2 \Leftrightarrow (2x)^2 + 2.2x.\frac{1}{4}y + ... = (... + ...)^2$$

Suy ra $A = 2x$

$$\Rightarrow 4x^2 + xy + \frac{1}{16}y^2 = (2 + \frac{1}{4}y)^2.$$

<u>Ví dụ 5:</u> Điền vào chỗ dấu ... để biểu thức trở thành bình phương của một tổng:

$$4x^2y^2 + ... + 9.$$

Giải

Ta có cách cách suy luận để điền như sau:

Cách 1: Coi $4x^2y^2$ và 9 là bình phương của số thứ nhất và số thứ hai, ta thấy:

$$4x^2y^2 = (2xy)^2,\ 9 = 3^2.$$

Do đó ta điền vào dấu ... hai lần tích của 2xy và 3.

Vậy:

$$4x^2y^2 + ... + 9 = (2xy)^2 + 2.2xy.3 + 3^2 = (2xy + 3)^2.$$

Trong cách điền này, ta thay ... bởi 12xy.

Cách 2: Xét 9 là bình phương của 3, còn $4x^2y^2$ là hai lần tích của số thứ nhất với số thứ hai, khi đó $4x^2y^2 = 2.\frac{2}{3}x^2y^2.3$.

Vậy:

$$4x^2y^2 + ... + 9 = 2.\frac{2}{3}x^2y^2.3 + (\frac{2}{3}x^2y^2)^2 + 3^2 = (\frac{2}{3}x^2y^2 + 3)^2.$$

Trong cách điền này, ta thay ... bởi $\frac{4}{9}x^4y^4$.

Cách 3: Xét $4x^2y^2$ là bình phương của 2xy, còn 9 là hai lần tích của số thứ nhất với số thứ hai, khi đó $9 = 2.2xy.\frac{9}{4xy}$.

Vậy:

$$4x^2y^2 + ... + 9 = (2xy)^2 + (\frac{9}{4xy})^2 + 2.2xy.\frac{9}{4xy} = (2xy + \frac{9}{4xy})^2.$$

Trong cách điền này, ta thay ... bởi $\frac{81}{16x^2y^2}$.

<u>Chú ý</u>: Nếu ta có:

- $P = a^2 + c \overset{a^2 \geq 0}{\geq} c \Rightarrow P_{Min} = c$, đạt được khi a = 0.
- $P = c - a^2 \overset{a^2 \geq 0}{\leq} c \Rightarrow P_{Max} = c$, đạt được khi a = 0.

từ đó, có thể sử dụng tổng bình phương để thực hiện đòi hỏi *"Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của một biểu thức"*, các ví dụ sau sẽ minh hoạ ứng dụng này.

Ví dụ 6: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = 2x^2 + 8x + 9.$$

Giải

Ta biến đổi P về dạng:

$$P = 2(x^2 + 4x) + 9 = 2(x^2 + 4x + 4) + 1 = 2(x + 2)^2 + 1 \geq 1$$

suy ra $P_{Min} = 1$, đạt được khi $x = -2$.

Ví dụ 7: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$Q = -4x^2 - 12x.$$

Giải

Ta biến đổi Q về dạng:

$$Q = -(4x^2 + 12x) = 9 - (4x^2 + 12x + 9) = 9 - (2x + 3)^2 \leq 9$$

suy ra $Q_{Max} = 9$, đạt được khi $x = -\frac{3}{2}$.

Ví dụ 8: Biết số tự nhiên a chia cho 3 dư 2, chứng minh rằng a^2 chia cho 3 dư 1.

Giải

Vì a chia cho 3 dư 2, nên đặt $a = 3p + 2$, $p \in \mathbf{N}$.

Khi đó:

$$a^2 = (3p + 2)^2 = 9p^2 + 12p + 4 = 9p^2 + 12p + 3 + 1$$

suy ra a^2 chia cho 3 dư 1.

Chú ý: Ta biết rằng:

- $a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$.
- $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$ và $b = 0$.

từ đó, có thể sử dụng tổng bình phương để thực hiện đòi hỏi "*Chứng minh đẳng thức có điều kiện*", ví dụ sau sẽ minh hoạ ứng dụng này.

Ví dụ 9: Cho bốn số dương a, b, c, d thoả mãn :

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 4abcd.$$

Chứng minh rằng $a = b = c = d$.

Giải

Từ giả thiết ta có:

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 4abcd$$

$$\Leftrightarrow (a^4 - 2a^2b^2 + b^4) + (c^4 - 2c^2d^2 + d^4) + (2a^2b^2 - 4abcd + 2c^2d^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 + (c^2 - d^2)^2 + (ab - cd)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = b^2 \\ c^2 = d^2 \\ ab = cd \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = d, \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 10:

a. Tính $(a + b + c)^2$.

b. Áp dụng để tính $(x + 2)^2(x + 1)^2$.

Giải

a. Ta có:

$$(a + b + c)^2 = [(a + b) + c]^2 = (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca.$$

Vậy ta được:

$$\boxed{(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca}$$

b. Ta có:

$$(x + 2)^2(x + 1)^2 = [(x + 2)(x + 1)]^2 = (x^2 + 3x + 2)^2$$
$$= (x^2)^2 + (3x)^2 + 2^2 + 2.x^2.3x + 2.3x.2 + 2.2.x^2$$
$$= x^4 + 9x^2 + 4 + 6x^3 + 12x + 4x^2$$
$$= x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4.$$

Yêu cầu: Các em học sinh hãy phát biểu hằng đẳng thức trên bằng lời.

Ví dụ 11: Xác định hệ số a sao cho:

$$P = x^2 + 2ax + 4$$

là bình phương của một tổng.

Giải

Để P là bình phương của một đa thức ta cần có các trường hợp:

Trường hợp 1: Xét với:

$$x^2 + 2ax + 4 = (x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$$

suy ra:

$$2a = 4 \Leftrightarrow a = 2.$$

Trường hợp 2: Xét với:

$$x^2 + 2ax + 4 = (-x + 2)^2 = x^2 - 4x + 4$$

suy ra:

$$2a = -4 \Leftrightarrow a = -2.$$

Vậy, với $a = \pm 2$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 12: Xác định các hệ số a, b sao cho:

$$P = x^4 + 2x^3 + ax^2 + 2x + b$$

là bình phương của một đa thức.

Giải

Để P là bình phương của một đa thức ta cần có các trường hợp:

Trường hợp 1: Xét với:

$$x^4 + 2x^3 + ax^2 + 2x + b = (x^2 + cx + d)^2$$
$$= x^4 + c^2x^2 + d^2 + 2cx^3 + 2dx^2 + 2cdx$$
$$= x^4 + 2cx^3 + (c^2 + 2d)x^2 + 2cdx + d^2$$

suy ra:

$$\begin{cases} 2 = 2c \\ a = c^2 + 2d \\ 2 = 2cd \\ b = d^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}.$$

Trường hợp 2: Xét với:

$$x^4 + 2x^3 + ax^2 + 2x + b = (-x^2 + cx + d)^2$$
$$= x^4 + c^2x^2 + d^2 - 2cx^3 - 2dx^2 + 2cdx$$
$$= x^4 - 2cx^3 + (c^2 - 2d)x^2 + 2cdx + d^2$$

suy ra:

$$\begin{cases} 2 = -2c \\ a = c^2 - 2d \\ 2 = 2cd \\ b = d^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}.$$

Tóm lại, với $a = 2$ và $b = 1$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Phát biểu bằng lời, viết công thức và chứng minh hằng đẳng thức *bình phương của một tổng*.

Câu hỏi 2: Chứng minh rằng:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca.$$

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1.

a. Tính $(3x^2 + \frac{5}{2}y)^2$.

b. Tính nhẩm 51^2.

c. Tính nhanh $153^2 + 153.94 + 47^2$.

Bài tập 2. Tính nhanh:

a. 101^2.

b. $99^2 + 99.2 + 1$.

Bài tập 3. Viết các biểu thức sau dưới dạng bình phương của một tổng:

a. $\frac{9}{4}x^2 + 3x + 4$.

b. $(9x^2 + 12x + 4) + 6(3x + 2) + 9$.

c. $9x^2 + 4y^2 + 2(3x + 2y + 6xy) + 1$.

Bài tập 4. Hãy khôi phục lại những hằng đẳng thức sau:

a. $... + 2xy + y^2 = (x + ...)^2$.

b. $9x^2 + ... + \frac{1}{4}y^2 = (... + ...)^2$.

c. $2x^2 + xy + ... = (... + ...)^2$.

Bài tập 5. Tính:

a. $(\frac{2}{3}x + 3y)^2$.

b. $(\sqrt{2}x + \sqrt{8}y)^2$.

c. $(x + \frac{1}{6}y + 3)^2$.

d. $(2x + 3)^2(x + 1)^2$.

Bài tập 6. Tìm x biết:

$$(3x + 1)^2 - 9(x + 2)^2 = -5.$$

Bài tập 7. Trong trường hợp nào ta có $(a + b)^2 = a^2 + b^2$.

Bài tập 8. Chứng minh rằng:

a. $x^2 + 2x + 2 > 0$ với mọi x.

b. $x^2 + y^2 + 2(x + y) + 3 > 0$ với mọi x, y.

c. $4x^2 + y^2 + 4xy + 4x + 2y + 2 > 0$ với mọi x, y.

Bài tập 9. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức:

a. $P = x^2 + 3x + 3$.

b. $Q = \frac{3}{2}x^2 + x + 1$.

c. $R = x^2 + 2y^2 + 2xy - 2y$.

d. $T = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$.

Bài tập 10. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức:

a. $P = 3 - 4x - x^2$.

b. $Q = 2x - 2 - 3x^2$.

c. $R = 2 - x^2 - y^2 - 2(x + y)$.

d. $S = 7 - x^2 - y^2 - 2(x + y)$.

Bài tập 11. Xác định các hệ số a, b sao cho:

$$P = x^4 + ax^3 + bx^2 - 8x + 1$$

là bình phương của một đa thức.

Bài tập 12. Biết số tự nhiên a chia cho 5 dư 2, chứng minh rằng a^2 chia cho 5 dư 4.

Bài tập 13. Cho n là một số tự nhiên không chia hết cho 3. Chứng minh rằng n^2 chia cho 3 thì dư 1.

Bài tập 14. Cho:

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ ab = 6 \end{cases}.$$

Không tính a, b. Hãy tính:

a. $a^2 + b^2$.

b. $a^3 + b^3$.

c. $a^4 + b^4$.

d. $a^5 + b^5$.

Bài tập 15. Xác định đa thức f(x), biết rằng:

$$f(x - 1) = x^2 + 3x + 2.$$

Bài tập 16. Chứng minh rằng:

a. Bình phương của một số lẻ chia cho 4 thì dư 1.

b. Bình phương của một số lẻ chia cho 8 thì dư 1.

Bài tập 17. Chứng minh rằng:

$$a^4 + b^4 + (a + b)^4 = 2(a^2 + ab + b^2)^2.$$

Bài tập 18. Chứng minh rằng nếu $a + b + c = 0$ ta luôn có:

a. $a^4 + b^4 + c^4 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$.

b. $a^4 + b^4 + c^4 = 2(ab + bc + ca)$.

c. $a^4 + b^4 + c^4 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)^2$.

Bài tập 19. Cho:

$$\begin{cases} a + b + c = abc \\ \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 2 \end{cases}.$$

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} = 2$.

Bài tập 20. Cho:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \text{ và } \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{z}{c} = 0.$$

Chứng minh rằng $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

Bài tập 21. Cho tam thức bậc hai

$f(x) = ax^2 + bx + c$, với a, b, c là các hằng số, x là biến số.

Chứng minh rằng:

a. Nếu $a > 0$ thì $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{4ac - b^2}{4a}$ tại $x = -\dfrac{b}{2a}$.

b. Nếu $a < 0$ thì $f(x)$ có giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{4ac - b^2}{4a}$ tại $x = -\dfrac{b}{2a}$.

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 3.

a. Ta có:

$$\frac{9}{4}x^2 + 3x + 4 = \left(\frac{3}{2}x + 2\right)^2.$$

b. Ta có:

$$(9x^2 + 12x + 4) + 6(3x + 2) + 9 = (3x + 2)^2 + 2.(3x + 2).3 + 3^2$$
$$= (3x + 2 + 3)^2 = (3x + 5)^2.$$

c. Ta có:

$$9x^2 + 4y^2 + 2(3x + 2y + 6xy) + 1$$
$$= (9x^2 + 12xy + 4y^2) + 2(3x + 2y) + 1$$
$$= (3x + 2y)^2 + 2(3x + 2y) + 1$$
$$= (3x + 2y + 1)^2.$$

Bài tập 4.

a. $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$.

b. $9x^2 + 3xy + \dfrac{1}{4}y^2 = (3x + \dfrac{1}{2}y)^2$.

c. Ta khôi phục thành:

$$2x^2 + xy + \frac{1}{8}y^2 = (\sqrt{2}x + \frac{1}{2\sqrt{2}}y)^2.$$

Bài tập 5.

a. $(\frac{2}{3}x + 3y)^2 = \frac{4}{9}x^2 + 4xy + 9y^2$.

b. $(\sqrt{2}x + \sqrt{8}y)^2 = 2x^2 + 8xy + 8y^2$.

c. $(x + \frac{1}{6}y + 3)^2 = x^2 + \frac{1}{36}y^2 + 9 + \frac{1}{3}xy + 6x + y$.

d. $(2x + 3)^2(x + 1)^2 = 4x^4 + 20x^3 + 37x^2 + 30x + 9$.

Bài tập 6. $x = -1$.

Bài tập 7. Biến đổi biểu thức về dạng:

$(a + b)^2 - a^2 - b^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 - a^2 - b^2 = 0 \Leftrightarrow 2ab = 0$

$\Leftrightarrow a = 0$ hoặc $b = 0$.

Vậy, $a = 0$ hoặc $b = 0$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 8.

a. Ta có:

$x^2 + 2x + 2 = x^2 + 2x + 1 + 1 = (x + 1)^2 + 1 > 0$ với mọi x.

b. Ta có:

$x^2 + y^2 + 2(x + y) + 3 = (x^2 + 2x + 1) + (y^2 + 2y + 1) + 1$

$= (x + 1)^2 + (y + 1)^2 + 1 > 0$ với mọi x, y.

c. Ta có:

$4x^2 + y^2 + 4xy + 4x + 2y + 2 = [(2x)^2 + y^2 + 1 + 4xy + 4x + 2y] + 1$

$= (2x + y + 1)^2 + 1 > 0$ với mọi x, y.

Bài tập 9.

a. Ta có:

$$P = x^2 + 2.\frac{3}{2}x + \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = (x + \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}.$$

Vậy, $P_{Min} = \frac{3}{4}$, đạt được khi $(x + \frac{3}{2})^2 = 0 \Leftrightarrow x + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$.

b. Ta có:

$$Q = \frac{3}{2}x^2 + x + 1 = \frac{3}{2}(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} + \frac{5}{9}) = \frac{3}{2}(x + \frac{1}{3})^2 + \frac{5}{6}.$$

Vậy, $Q_{Min} = \frac{5}{6}$, đạt được khi:

$$\frac{3}{2}(x + \frac{1}{3})^2 = 0 \Leftrightarrow x + \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}.$$

c. Ta có:

$R = x^2 + 2y^2 + 2xy - 2y = (x^2 + y^2 + 2xy) + (y^2 - 2y + 1) - 1$

$= (x + y)^2 + (y - 1)^2 - 1$

Vậy, $R_{Min} = -1$, đạt được khi:

$(x + y)^2 = 0$ và $(y - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x + y = 0$ và $y - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = -y$ và $y = 1 \Leftrightarrow x = -1$ và $y = 1$.

Hằng đẳng thức 2 — BÌNH PHƯƠNG CỦA MỘT HIỆU

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Ta có:

$$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

Đọc là " *Bình phương của một hiệu hai biểu thức bằng bình phương biểu thức thứ nhất trừ hai lần tích biểu thức thứ nhất với biểu thức thứ hai cộng bình phương biểu thức thứ hai* ".

Để chứng minh hằng đẳng thức, ta có thể lựa chọn một trong hai cách:

Cách 1: Thực hiện phép biến đổi:

$$VT = (A - B)^2 = (A - B)(A - B) = A(A - B) - B(A - B)$$
$$= A^2 - AB - AB + B^2 = A^2 - 2AB + B^2, \text{ đpcm.}$$

Cách 2: Tận dụng hằng đẳng thức về bình phương của một tổng:

$$VT = (A - B)^2 = [A + (-B)]^2 = A^2 + 2A(-B) + (-B)^2$$
$$= A^2 - 2AB + B^2, \text{ đpcm.}$$

Trong nhiều trường hợp, ta sử dụng công thức:

$$(A - B)^2 = (A + B)^2 - 4AB$$

thí dụ với yêu cầu:

" *Tính giá trị của $(A - B)^2$ biết $A + B = p$ và $AB = q$* ".

Mở rộng:

$$\mathbf{(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2bc - 2ca}$$
$$\mathbf{(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ca}$$

tương tự như vậy, ta có thể khai triển bình phương của một hiệu 5, 6, 7,..., n số hạng.

Lưu ý: Ta luôn có:

$$\mathbf{(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2 = B^2 - 2BA + A^2 = (B - A)^2.}$$

II. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1:

a. Tính $(3x - 4y)^2$.

b. Tính nhẩm 99^2.

Giải

a. Ta có:

$$(3x - 4y)^2 = (3x)^2 - 2.3x.4y + (4y)^2 = 9x^2 - 24xy + 16y^2.$$

b. Ta có:

$$99^2 = (100 - 1)^2 = 100^2 - 2.100 + 1 = 9801.$$

Ví dụ 2: Viết các biểu thức dưới dạng bình phương:

a. $4x^2 - xy + \frac{1}{16}y^2$.

b. $(4x^2 - 4x + 1) + 4y(1 - 2x) + 4y^2$.

Giải

a. Ta có:

$$4x^2 - xy + \frac{1}{16}y^2 = (2x)^2 - 2.2x.\frac{1}{4}y + (\frac{1}{4}y)^2 = (2x - \frac{1}{4}y)^2.$$

b. Ta có:

$$(4x^2 - 4x + 1) + 4y(1 - 2x) + 4y^2 = (2x - 1)^2 - 2.(2x - 1).2y + (2y)^2$$
$$= (2x - 1 - 2y)^2.$$

Ví dụ 3: Hãy khôi phục lại những hằng đẳng thức sau:

a. $... - 4xy + 4y^2 = (x - ...)^2$.

b. $4x^2 - ... + 9y^2 = (... - ...)^2$.

c. $2x^2 - 4xy + ... = (... - ...)^2$.

Giải

a. Ta có:

Suy ra B = 2y

$$... - 4xy + 4y^2 = (x - ...)^2 \Leftrightarrow ... - 2.x.2y + (2y)^2 = (x - ...)^2$$

Suy ra A = x

$\Rightarrow x^2 - 4xy + 4y^2 = (x - 2y)^2$.

b. Ta có:

Suy ra B = 3y

$$4x^2 - ... + 9y^2 = (... - ...)^2 \Leftrightarrow (2x)^2 - ... + (3y)^2 = (... - ...)^2$$

Suy ra A = 2x

$\Rightarrow 4x^2 - 12xy + 9y^2 = (2x - 3y)^2$.

c. Ta có:

Suy ra B = $y\sqrt{2}$

$$2x^2 - 4xy + ... = (... - ...)^2 \Leftrightarrow (x\sqrt{2})^2 - 2.x\sqrt{2}.\sqrt{2}y + ... = (... - ...)^2$$

Suy ra A = $x\sqrt{2}$

$\Rightarrow 2x^2 - 4xy + 2y^2 = (x\sqrt{2} - y\sqrt{2})^2$.

Ví dụ 4: Tính giá trị của biểu thức:

$$P = (x^2 + 4xy + 4y^2) - 2(x + 2y)(y - 1) + (y^2 - 2y + 1)$$

với $x + y = 10$.

Giải

Ta biến đổi P về dạng:

$$P = (x^2 + 4xy + 4y^2) - 2(x + 2y)(y - 1) + (y^2 - 2y + 1)$$
$$= (x + 2y)^2 - 2(x + 2y)(y - 1) + (y - 1)^2 = (x + 2y - y + 1)^2 = (x + y + 1)^2.$$

Suy ra $P = (10 - 1)^2 = 81$.

Ví dụ 5:

a. Tính $(a - b - c)^2$.

b. Áp dụng để tính $(x^2 - x - 1)^2$.

Giải

a. Ta có:

$$(a - b - c)^2 = [(a - b) - c]^2 = (a - b)^2 - 2(a - b)c + c^2$$
$$= a^2 - 2ab + b^2 - 2ac + 2bc + c^2$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2bc - 2ca.$$

Vậy ta được:

$$\boxed{(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2bc - 2ca}$$

b. Áp dụng, ta được:

$$(x^2 - x - 1)^2 = x^4 + x^2 + 1 - 2x^2.x + 2x.1 - 2.1.x^2$$
$$= x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1.$$

Yêu cầu:
1. Các em học sinh hãy phát biểu hằng đẳng thức trên bằng lời.
2. Có thể sử dụng kết quả của hằng đẳng thức $(a + b + c)^2$ để chứng minh hằng đẳng thức trên hay không ?.
3. Từ đó hãy tính $(a + b - c)^2$, $(a - b + c)^2$.

Ví dụ 6: Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức:

a. $P = 12x - 3x^2$.

b. $Q = 2x - 2xy - 2x^2 - y^2$.

Giải

a. Ta có:

$$P = 12x - 3x^2 = -3(x^2 - 4x) = 12 - 3(x^2 - 4x + 4)$$
$$= 12 - 3(x - 2)^2 \le 12$$

suy ra $P_{Max} = 12$, đạt được khi:

$$(x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

b. Ta có:

$$Q = 2x - 2xy - 2x^2 - y^2 = -x^2 + 2x - (x^2 + 2xy + y^2)$$
$$= 1 - (x^2 - 2x + 1) - (x^2 + 2xy + y^2)$$
$$= 1 - (x - 1)^2 - (x + y)^2 \le 1$$

suy ra $Q_{Max} = 1$, đạt được khi:

$$\begin{cases}(x - 1)^2 = 0\\(x + y)^2 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x - 1 = 0\\x + y = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 1\\y = -1\end{cases}.$$

Ví dụ 7: Rút gọn các biểu thức:

a. $(x - y + z)^2 + (z - y)^2 - 2(x - y + z)(z - y)$.

b. $(x + y)^2 + 4(x - y)^2 - 4(x - y)(x + y)$.

Giải

a. Ta có:

$$(x - y + z)^2 + (z - y)^2 - 2(x - y + z)(z - y) = (x - y + z - z + y)^2 = x^2.$$

b. Ta có:

$$(x + y)^2 + 4(x - y)^2 - 4(x - y)(x + y)$$
$$= (x + y)^2 - 2.(x + y).2(x - y) + [2(x - y)]^2$$
$$= [x + y - 2(x - y)]^2 = (-x + 3y)^2 = (x - 3y)^2.$$

Ví dụ 8: Chứng minh rằng:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2.$$

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Biến đổi vế phải của đẳng thức:

$$VP = (a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2) + (a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2)$$
$$= a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2 = (a^2c^2 + a^2d^2) + (b^2c^2 + b^2d^2)$$
$$= a^2(c^2 + d^2) + b^2(c^2 + d^2) = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2).$$ dpcm.

Cách 2: Biến đổi vế trái của đẳng thức:

$$VT = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 = (a^2c^2 + b^2d^2) + (a^2d^2 + b^2c^2)$$
$$= (a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2) + (a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2)$$
$$= (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2,$$ dpcm.

Ví dụ 9: Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh của ΔABC và p là nửa chu vi. Chứng minh rằng:

$$(p - a)^2 + (p - b)^2 + (p - c)^2 + p^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Giải

Theo giả thiết thì $a + b + c = 2p$.

Ta có:

$$+\begin{cases}(p - a)^2 = p^2 - 2pa + a^2\\(p - b)^2 = p^2 - 2pb + b^2\\(p - c)^2 = p^2 - 2pc + c^2\end{cases}$$

$$\Rightarrow (p - a)^2 + (p - b)^2 + (p - c)^2 = 3p^2 - 2p(a + b + c) + a^2 + b^2 + c^2$$
$$= 3p^2 - 2p.2p + a^2 + b^2 + c^2$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 - p^2$$

$$\Leftrightarrow (p - a)^2 + (p - b)^2 + (p - c)^2 + p^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$ dpcm.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Phát biểu bằng lời, viết công thức và chứng minh hằng đẳng thức *bình phương của một hiệu*.

Câu hỏi 2: Chứng minh rằng:

$$(a - b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ca.$$
$$(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2bc - 2ca.$$

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1.

a. Tính $(\sqrt{2}x^2 - y)^2$.

b. Tính nhẩm 99^2.

c. Tính nhanh $163^2 - 163.126 + 63^2$.

Bài tập 2. Viết các biểu thức sau dưới dạng bình phương của một hiệu:

a. $4x^2 - 6x + \frac{9}{4}$.

b. $4(x^2 + 2x + 1) - 12x - 3$.

c. $25x^2 - 20xy + 4y^2$.

d. $(x^2 - 2x + 1) - 2(x - 1)(2y - 1) + (4y^2 - 4y + 1)$.

Bài tập 3. Hãy khôi phục lại những hằng đẳng thức sau:

a. $\ldots - xy + y^2 = (\ldots - \ldots)^2$.

b. $2x^2 - \ldots + \frac{1}{4}y^2 = (\ldots - \ldots)^2$.

c. $3x^2 - xy + \ldots = (\ldots - \ldots)^2$.

Bài tập 4. Tính:

a. $\left(\frac{x}{2} - 2y\right)^2$

b. $(\sqrt{2}x - y)^2$.

c. $(\frac{1}{2}x - 4y)^2$.

d. $(x + y)^2 + (x - y)^2$.

e. $(x - 2y - 3)^2$.

f. $(3x + 1)^2(2x - 3)^2$.

g. $(x^2 - 0,1)^2(2x + 0,5)^2$.

Bài tập 5. Chứng minh rằng các biểu thức sau luôn luôn có giá trị dương với mọi giá trị của biến:

a. $x^2 - 8x + 17$.

b. $4x^2 - 12x + 13$.

c. $x^2 - x + 1$.

d. $x^2 - 2x + y^2 + 4y + 6$.

Bài tập 6. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức:

a. $P = 9x^2 - 2x + 3$.

b. $Q = 3x^2 - 3x + 1$.

c. $R = 2x^2 + y^2 - 2xy + 1$.

Bài tập 7. Tìm x, biết:

a. $3(x - 1)^2 - 3x(x - 5) = 1$.

b. $(6x - 2)^2 + (5x - 2)^2 - 4(3x - 1)(5x - 2) = 0$.

Bài tập 8. Chứng minh các hằng đẳng thức:

a. $(x + y)^2 - 4xy = (x - y)^2$.

b. $(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$.

Bài tập 9. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 = p^2 + (p - a)^2 + (p - b)^2 + (p - c)^2$$

với a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác có chu vi bằng 2p.

Bài tập 10. Chứng minh rằng:

$$(x^2 + x + 1)^2 + (x - 1)^2 - 2(x^2 + x + 1)(x - 1) \geq 4 \text{ với mọi } x.$$

Bài tập 11. Cho:

$$\begin{cases} a - b = 1 \\ ab = 12 \end{cases}.$$

Không tính a, b. Hãy tính:

a. $a^2 + b^2$.

b. $a^3 - b^3$.

c. $a^4 + b^4$.

d. $a^5 - b^5$.

Bài tập 12. Xác định đa thức f(x), biết rằng:

$$f(x + 1) = x^2 - 3x + 2.$$

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 2. Viết các biểu thức sau dưới dạng bình phương của một hiệu:

a. $4x^2 - 6x + \frac{9}{4} = (2x - \frac{3}{2})^2$.

b. $4(x^2 + 2x + 1) - 12x - 3 = (2x - 1)^2$.

c. $25x^2 - 20xy + 4y^2 = (5x - 2y)^2$.

d. $(x^2 - 2x + 1) - 2(x - 1)(2y - 1) + (4y^2 - 4y + 1) = (x - 2y + 2)^2$.

Bài tập 3.

a. $\frac{1}{4}x^2 - xy + y^2 = (\frac{1}{2}x - y)^2$.

b. $2x^2 - \sqrt{2}xy + \frac{1}{4}y^2 = (\sqrt{2}x - \frac{1}{2}y)^2$.

c. $3x^2 - xy + \frac{1}{12}y = (\sqrt{3}x - \frac{1}{2\sqrt{3}}y)^2$.

Bài tập 4.

a. $\left(\frac{x}{2} - 2y\right)^2 = \frac{x^2}{4} - 2xy + 4y^2$.

b. $(\sqrt{2}x - y)^2 = 2x^2 - 2\sqrt{2}xy + y^2$.

c. $(\frac{1}{2}x - 4y)^2 = \frac{1}{4}x^2 - 4xy + 16y^2$.

d. $(x + y)^2 + (x - y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2xy + y^2 = 2x^2 + 2y^2$.

e. $(x - 2y - 3)^2 = x^2 + 4y^2 + 9 - 4xy - 6x + 12y$.

f. $(3x + 1)^2(2x - 3)^2 = 36x^4 - 84x^3 + 13x^2 + 42x + 9$.

g. $(x^2 - 0,1)^2(2x + 0,5)^2 = 4x^6 + 2x^5 - 0,55x^4 - 0,4x^3 - 0,01x^2 + 0,02x + 0,0025$.

Bài tập 5.

a. $x^2 - 8x + 17 = (x - 4)^2 + 1 > 0$ với mọi x.

b. $4x^2 - 12x + 13 = (2x - 3)^2 + 4 > 0$ với mọi x.

c. $x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$ với mọi x.

d. $x^2 - 2x + y^2 + 4y + 6 = (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + 1 > 0$ với mọi x, y.

Bài tập 6.

a. Ta có:

$$P = 9x^2 - 2x + 3 = (3x - \frac{1}{3})^2 + \frac{26}{9}.$$

Vậy, $P_{Min} = \frac{26}{9}$, đạt được khi $(3x - \frac{1}{3})^2 = 0 \Leftrightarrow 3x - \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{9}$.

b. Ta có:

$$Q = 3x^2 - 3x + 1 = 3(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}.$$

Vậy, $Q_{Min} = \frac{1}{4}$, đạt được khi $3(x - \frac{1}{2})^2 = 0 \Leftrightarrow x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

c. Ta có:

$$R = 2x^2 + y^2 - 2xy + 1 = (x^2 + y^2 - 2xy) + x^2 + 1 = (x - y)^2 + x^2 + 1.$$

Vậy, $R_{Min} = 1$, đạt được khi:

$$(x - y)^2 = 0 \text{ và } x^2 = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \text{ và } x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ và } y = 0.$$

Bài tập 7.

a. Ta có:

$$3(x - 1)^2 - 3x(x - 5) = 9x + 3.$$

Do đó, ta được:

$$9x + 3 = 1 \Leftrightarrow 9x = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{9}.$$

Vậy, $x = -\frac{2}{9}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. Ta có:

$$(6x - 2)^2 + (5x - 2)^2 - 4(3x - 1)(5x - 2) = x^2.$$

Do đó, ta được:

$$x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy, $x = 0$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 8.

a. Ta có:

$$(x + y)^2 - 4xy = x^2 + 2xy + y^2 - 4xy = x^2 - 2xy + y^2$$
$$= (x - y)^2, \text{ đpcm.}$$

b. Ta có:

$$(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = a^2c^2 + 2acbd + b^2d^2 + a^2d^2 - 2adbc + b^2c^2$$
$$= (a^2c^2 + a^2d^2) + (b^2d^2 + b^2c^2)$$
$$= a^2(c^2 + d^2) + b^2(d^2 + c^2)$$
$$= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2), \text{ dpcm.}$$

Bài tập 9. Biến đổi đẳng thức về dạng:

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 4p^2 - 2p(a + b + c)$$
$$\Leftrightarrow 4p^2 - 2p.2p = 0, \text{ luôn đúng.}$$

Bài tập 10. Ta có:

$$(x^2 + x + 1)^2 + (x - 1)^2 - 2(x^2 + x + 1)(x - 1)$$
$$= (x^2 + x + 1 - x + 1)^2 = (x^2 + 2)^2 \geq 4 \text{ với mọi x.}$$

Bài tập 11. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 12. Ta biến đổi:

$$f(x + 1) = x^2 - 3x + 2 = (x + 1)^2 - 5(x + 1) + 6.$$

Suy ra $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

Hằng đẳng thức 3 — HIỆU HAI BÌNH PHƯƠNG

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Ta có:

$$\boxed{A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)}$$

Đọc là " *Hiệu hai bình phương bằng hiệu hai biểu thức nhân với tổng hai biểu thức* ".

Để chứng minh hằng đẳng thức, ta có thể lựa chọn một trong hai cách:

Cách 1: Thực hiện phép biến đổi:

$$VP = (A - B)(A + B) = A(A + B) - B(A + B)$$
$$= A^2 + AB - AB - B^2 = A^2 - B^2, \text{ dpcm.}$$

Cách 2: Thực hiện phép thêm bớt:

$$VP = A^2 - B^2 = A^2 - AB + AB - B^2 = A(A - B) + B(A - B)$$
$$= (A + B)(A - B), \text{ dpcm.}$$

II. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1:

a. Tính $(x^2y - 2z)(x^2y + 2z)$.

b. Tính nhẩm 26.34.

Giải

a. Ta có:

$$(x^2y - 2z)(x^2y + 2z) = (x^2y)^2 - (2z)^2 = x^4y^2 - 4z^2.$$

b. Ta có:

$$26.34 = (30 - 4)(30 + 4) = 30^2 - 4^4 = 884.$$

Ví dụ 2: Thực hiện phép tính:

$$3(x+1)^2 - 2(x-3)^2 - (x+2)(x-2).$$

Giải

Ta có:

$$3(x+1)^2 - 2(x-3)^2 - (x+2)(x-2)$$
$$= 3(x^2+2x+1) - 2(x^2-6x+9) - (x^2-4) = 18x - 11.$$

Chú ý: Thứ tự thực hiện phép tính trên như sau:

- Bình phương của $x + 1$ rồi mới nhân với 3.
- Bình phương của $x - 3$ rồi mới nhân với -2.

Ví dụ 3: Tính giá trị của các biểu thức:

a. $P = (x+y)^2 - (x-y)^2$ với $xy = \frac{1}{4}$.

b. $Q = (x+2y+1)^2 - (x-2y)^2$ với $x = 2005$ và $y = 33$.

Giải

a. Ta biến đổi P về dạng đơn giản theo các cách:

Cách 1: Ta có:

$$P = (x+y)^2 - (x-y)^2 = (x^2+2xy+y^2) - (x^2-2xy+y^2) = 4xy.$$

Cách 2: Ta có:

$$P = (x+y)^2 - (x-y)^2 = [(x+y)-(x-y)][(x+y)+(x-y)] = 4xy.$$

Suy ra:

$$P = 4.\frac{1}{4} = 1.$$

b. Ta có:

$$Q = (x+2y+1)^2 - (x-2y)^2$$
$$= [(x+2y+1)-(x-2y)][(x+2y+1)+(x-2y)] = (4y+1)(2x+1).$$

Suy ra:

$$Q = (4.33+1)(2.2005+1) = 133\ .\ 4011 = 533463.$$

Ví dụ 4: Rút gọn biểu thức:

a. $(x^2 - 2xy + 2y^2)(x^2 + 2xy + 2y^2)$.

b. $(2x^2 + 2x + 1)(2x^2 - 2x + 1) - (2x^2 - 1)^2$.

Giải

a. Ta có:

$$(x^2 - 2xy + 2y^2)(x^2 + 2xy + 2y^2)$$
$$= [(x^2+2y^2) - 2xy][(x^2+2y^2) + 2xy] = (x^2+2y^2)^2 - 4x^2y^2$$
$$= x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 4x^2y^2 = x^4 + 4y^4.$$

b. Ta có:

$$(2x^2 + 2x + 1)(2x^2 - 2x + 1) - (2x^2 - 1)^2$$
$$= [(2x^2+1) + 2x][(2x^2+1) - 2x] - (2x^2-1)^2$$
$$= (2x^2+1)^2 - 4x^2 - (2x^2-1)^2 = [(2x^2+1)^2 - (2x^2-1)^2] - 4x^2$$
$$= (2x^2+1-2x^2+1)(2x^2+1+2x^2-1) - 4x^2 = 8x^2 - 4x^2 = 4x^2.$$

Ví dụ 5: Tính nhanh giá trị của biểu thức:

$$P = (2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + 100^2) - (1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + 99^2).$$

Giải

Ta có:

$$P = (2^2 + 4^2 + ... + 100^2) - (1^2 + 3^2 + ... + 99^2)$$
$$= (2^2 - 1^2) + (4^2 - 3^2) + (6^2 - 5^2) + ... + (100^2 - 99^2)$$
$$= 3 + 7 + 11 + ...199 = \frac{50(3 + 199)}{2} = 5050.$$

Yêu cầu: Các em học sinh hãy lý giải tại sao lại có được:

$$3 + 7 + 11 + ...199 = \frac{50(3 + 199)}{2}.$$

(Kiến thức này thuộc chương trình lớp 6).

Ví dụ 6:

a. Biến đổi thành tích biểu thức:

$$(x^2 + 3x + 1)^2 - 1.$$

b. Từ kết quả trên hãy chứng minh rằng tích của bốn số tự nhiên liên tiếp cộng với 1 luôn là một số chính phương.

Giải

a. Ta có:

$$(x^2 + 3x + 1)^2 - 1 = (x^2 + 3x + 1 - 1)(x^2 + 3x + 1 + 1)$$
$$= (x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) = x(x + 3)(x^2 + x + 2x + 2)$$
$$= x(x + 3)[x(x + 1) + 2(x + 1)] = x(x + 3)(x + 2)(x + 1)$$
$$= x(x + 1)(x + 2)(x + 3).$$

b. Với bốn số tự nhiên liên tiếp n, n + 1, n + 2, n + 3, theo câu a) ta có:

$$n(n + 1)(n + 2)(n + 3) = (n^2 + 3n + 1)^2 - 1$$
$$\Leftrightarrow n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2 = k^2, \text{ với } n \in N$$ - đpcm.

Ví dụ 7:

a. Biến đổi thành tích biểu thức: $(x^2 - 8)^2 + 36$.

b. Từ kết quả trên hãy tìm $n \in \mathbf{N}$ để $(n^2 - 8)^2 + 36$ là số nguyên tố.

Giải

a. Ta có:

$$(x^2 - 8)^2 + 36 = x^4 - 16x^2 + 64 + 36 = x^4 + 100 - 16x^2$$
$$= x^4 + 100 + 20x^2 - 36x^2 = (x^2 + 10)^2 - 36x^2$$
$$= (x^2 + 10 - 6x)(x^2 + 10 + 6x).$$

b. Theo câu a) ta có:

$$(n^2 - 8)^2 + 36 = (n^2 + 10 - 6n)(n^2 + 10 + 6n).$$

Để $(n^2 - 8)^2 + 36$ là số nguyên tố điều kiện cần là

$$n^2 + 10 - 6n = 1 \Leftrightarrow n^2 - 6n + 9 = 0 \Leftrightarrow (n - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow n = 3.$$

Thử lại, với n = 3 ta được:

$(n^2 - 8)^2 + 36 = 37$ là số nguyên tố.

Vậy, với n = 3 thoả mãn điều kiện đầu bài.

Chú ý: Trong lời giải của ví dụ trên chúng ta đã sử dụng kết quả:

" *Số nguyên tố là số chỉ có ước là 1 và chính nó* "

tức là " *Số a là số nguyên tố thì a chỉ có thể biểu diễn a = 1.a* "

Do đó, nếu số a có dạng $a = a_1.a_2$ thì điều kiện để a là số nguyên tố là $1 = a_1 < a_2$.

Ví dụ 8: Cho a − b = 1, chứng minh rằng:

$$(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)\ldots(a^{16} + b^{16}) = a^{32} - b^{32}.$$

Giải

Ta xét

$$VT = (a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)\ldots(a^{16} + b^{16})$$

$$= 1.(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)\ldots(a^{16} + b^{16})$$

$$= \underbrace{(a - b).(a + b)}_{a^2 - b^2}(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)\ldots(a^{16} + b^{16})$$

...

$$\underbrace{a^{16} - b^{16}}$$

$$= a^{32} - b^{32}, \text{ đpcm.}$$

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Phát biểu bằng lời, viết công thức và chứng minh hằng đẳng thức *hiệu hai bình phương*.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1.

a. Tính $(xy - 2x^2z)(xy + 2x^2z)$.

b. Tính nhẩm 95.105.

Bài tập 2. Tính nhẩm:

a. $138^2 - 38^2$.

b. $86^2 - 14^2$.

c. $180^2 - 170^2$.

d. 29 . 31.

e. $1998^2 - 1997(1998 + 1)$.

Bài tập 3. Tính nhẩm:

$$(10^2 + 8^2 + 6^2 + 4^2 + 2^2) - (9^2 + 7^2 + 5^2 + 3^2 + 1^2).$$

Bài tập 4. Thực hiện phép tính:

a. $(2x + 5)(2x - 5)$.

b. $(x^2 + 3)(3 - x^2)$.

c. $3x(x - 1)^2 - 2x(x + 3)(x - 3) + 4x(x - 4)$.

d. $4(2x + 5)^2 - 2(3x + 1)(1 - 3x)$.

Bài tập 5. Viết các biểu thức sau dưới dạng một tích các đa thức:

a. $9 - 4x^2$.

b. $16x^2 - 25$.

c. $a^4 - 16$.

d. $(a + b)^2 - 1$.

Bài tập 6. Rút gọn biểu thức:

a. $(x - 2y)(x + 2y) + (x + 2y)^2$.

b. $(x^2 - xy + y^2)(x^2 + xy + y^2)$.

c. $(x - 2y + 3z)(x + 2y - 3z)$.

d. $(3x^3 + 3x + 1)(3x^3 - 3x + 1) - (3x^3 + 1)$.

Bài tập 7. Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức với $x = \frac{1}{2}$, $y = -3$:

a. $A = (x + y)^2 + (x - y)^2 + 2(x + y)(x - y)$.

b. $B = 3(x - y)^2 - 2(x + y)^2 - (x - y)(x + y)$.

Bài tập 8. Rút gọn biểu thức:

a. $(a + b + c)^2 - (b + c)^2 - c^2$. b. $(a + b + c)^2 - (b + c)^2 - 2ab - 2ac$.

Bài tập 9. Tìm x, biết:

a. $(x + 3)^2 - (x - 4)(x + 8) = 1$.

b. $3(x + 2)^2 + (2x - 1)^2 - 7(x + 3)(x - 3) = 36$.

Bài tập 10. Chứng minh rằng:

$$1001^2 + 1002^2 + 1004^2 - 1006^2 = 1000^2 + 1003^2 + 1005^2 - 1007^2.$$

Bài tập 11. Rút gọn biểu thức:

a. $(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{4})(1 + \frac{1}{16})...(1 + \frac{1}{2^{2n}})$.

b. $(10 + 1).(10^2 + 1).....(10^{2n} + 1)$.

Bài tập 12. Tính nhanh giá trị của các biểu thức:

a. $(15^4 - 1)(15^4 + 1) - 3^8.5^8$.

b. $2005^2 - 2004.2006$.

Bài tập 13. Tìm hai số tự nhiên liên tiếp biết rằng hiệu các bình phương của chúng bằng 31.

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 4.

a. $(2x + 5)(2x - 5) = 4x^2 - 25$.

b. $(x^2 + 3)(3 - x^2) = (3 + x^2)(3 - x^2) = 9 - x^2$.

c. $3x(x - 1)^2 - 2x(x + 3)(x - 3) + 4x(x - 4) = x^3 - 2x^2 + 5x$.

d. $4(2x + 5)^2 - 2(3x + 1)(1 - 3x) = 34x^2 + 80x + 98$.

Bài tập 5.

a. $9 - 4x^2 = (3 - 2x)(3 + 2x)$.

b. $16x^2 - 25 = (4x - 5)(4x + 5)$.

c. $a^4 - 16 = (a^2 - 4)(a^2 + 4) = (a - 2)(a + 2)(a^2 + 4)$.

d. $(a + b)^2 - 1 = (a + b - 1)(a + b + 1)$.

Bài tập 6.

a. $(x - 2y)(x + 2y) + (x + 2y)^2 = 2x^2 + 4xy$.

b. $(x^2 - xy + y^2)(x^2 + xy + y^2) = x^4 + x^2y^2 + y^4$.

c. $(x - 2y + 3z)(x + 2y - 3z) = x^2 - 4y^2 + 12y^2z^2 - 9z$.

d. $(3x^3 + 3x + 1)(3x^3 - 3x + 1) - (3x^3 + 1) = 9x^6 + 3x^3 - 9x^2$.

Bài tập 7.

a. Ta có $A = 4x^2$.

Do đó, với $x = \frac{1}{2}$, $y = -3$, ta được $A = 1$.

b. Ta có $B = -10xy + 2y^2$.

Do đó, với $x = \frac{1}{2}$, $y = -3$, ta được $B = 33$.

Bài tập 8.

a. $(a + b + c)^2 - (b + c)^2 - c^2 = a^2 + 2ab + 2ac - c^2$.

b. $(a + b + c)^2 - (b + c)^2 - 2ab - 2ac = a^2$.

Bài tập 9.

a. Ta có $(x + 3)^2 - (x - 4)(x + 8) = 2x + 41$.

Do đó, ta được:

$$2x + 41 = 1 \Leftrightarrow 2x = 40 \Leftrightarrow x = 20.$$

Vậy, $x = 20$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. Ta có $3(x + 2)^2 + (2x - 1)^2 - 7(x + 3)(x - 3) = 8x + 76$.

Do đó, ta được:

$$8x + 76 = 36 \Leftrightarrow 8x = 40 \Leftrightarrow x = 5.$$

Vậy, $x = 5$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Hằng đẳng thức 4 — LẬP PHƯƠNG CỦA MỘT TỔNG

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Ta có:

$$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

Đọc là " *Lập phương của một tổng hai biểu thức bằng lập phương biểu thức thứ nhất cộng ba lần tích bình phương biểu thức thứ nhất với biểu thức thứ hai cộng ba lần tích biểu thức thứ nhất với bình phương biểu thức thứ hai cộng lập phương biểu thức thứ hai* ".

Để chứng minh hằng đẳng thức, ta có thể lựa chọn một trong hai cách:

Cách 1: Thực hiện phép biến đổi:

$$\begin{aligned} VT = (A + B)^3 &= (A + B)(A + B)^2 = (A + B)(A^2 + 2AB + B^2) \\ &= A(A^2 + 2AB + B^2) + B(A^2 + 2AB + B^2) \\ &= A^3 + 2A^2B + AB^2 + BA^2 + 2AB^2 + B^3 \\ &= A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3, \text{ đpcm.} \end{aligned}$$

Cách 2: Thực hiện phép tách:

$$VP = A^3 + 2A^2B + A^2B + AB^2 + 2AB^2 + B^3$$
$$= (A^3 + 2A^2B + AB^2) + (A^2B + 2AB^2 + B^3)$$
$$= A(A^2 + 2AB + B^2) + B(A^2 + 2AB + B^2)$$
$$= A(A + B)^2 + B(A + B)^2 = (A + B)^2(A + B) = (A + B)^3.$$

II. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1:

a. Tính $(x + 2y)^3$.

b. Tính nhẩm 11^3.

Giải

a. Ta có:

$$(x + 2y)^3 = x^3 + 3.x^2.2y + 3.x.(2y)^2 + (2y)^3 = x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3.$$

b. Ta có:

$$11^3 = (10 + 1)^3 = 10^3 + 3.10^2.1 + 3.10.1^2 + 1^3 = 1331.$$

Ví dụ 2: Viết các biểu thức sau dưới dạng lập phương của một tổng:

a. $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$.

b. $3\sqrt{3}x^3 + 18x^2 + 12\sqrt{3}x + 8$.

Giải

a. Ta có:

$$x^3 + 9x^2 + 27x + 27 = x^3 + 3.x^2.3 + 3.x.3^2 + 3^3 = (x + 3)^3.$$

Chú ý: Nếu yêu cầu của bài toán được phát biểu dưới dạng:

" *Giải phương trình:*

$x^3 + 9x^2 + 27x + 27 = 0$"

khi đó ta nhận được:

$(x + 3)^3 = 0$ suy ra $x = -3$.

b. Ta có:

$$3\sqrt{3}x^3 + 18x^2 + 12\sqrt{3}x + 8 = (\sqrt{3}x)^3 + 3.(\sqrt{3}x)^2.2 + 3.\sqrt{3}x.2^2 + 2^3$$
$$= (\sqrt{3}x + 2)^3.$$

Ví dụ 3: Tính giá trị của biểu thức:

$$P = (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + 3(x^2 + 2x + 1)y + 3(x + 1)y^2 + y^3$$

với $x + y = 9$.

Giải

Ta có:

$$P = (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + 3(x^2 + 2x + 1)y + 3(x + 1)y^2 + y^3$$
$$= (x + 1)^3 + 3(x + 1)^2y + 3(x + 1)y^2 + y^3 = (x + 1 + y)^3$$

suy ra $P = (9 + 1)^3 = 1000$.

Ví dụ 4: Tính giá trị của biểu thức:

$$P = x^3 + \frac{3}{10}x^2 + \frac{3}{100}x \text{ với } x = \frac{9}{10}.$$

Giải

Ta có:

$$P = x^3 + 3.x^2.\frac{1}{10} + 3.x.(\frac{1}{10})^2 + (\frac{1}{10})^3 - (\frac{1}{10})^3 = (x + \frac{1}{10})^3 - \frac{1}{10}$$

suy ra:

$$P = (\frac{9}{10} + \frac{1}{10})^3 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}.$$

Ví dụ 5: Chứng minh rằng nếu $a + b + c + d = 0$ thì:

a. $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3(b + d)(ac - bd)$.

b. $(b + d)(ac - bd) = (b + c)(ad - bc)$.

Giải

a. Từ giả thiết ta có:

$$a + b + c + d = 0 \Leftrightarrow a + c = -(b + d) \Leftrightarrow (a + c)^3 = -(b + d)^3$$
$$\Leftrightarrow a^3 + c^3 + 3ac(a + c) = -b^3 - d^3 - 3bd(b + d)$$
$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = -3ac(a + c) - 3bd(b + d)$$
$$= 3ac(b + d) - 3bd(b + d)$$
$$= 3(b + d)(ac - bd). \quad (1)$$

Yêu cầu: Các em học sinh thử lí giải:

" *Vì sao lại định hướng được phép biến đổi như trên ?*".

b. Thực hiện tương tự như trong câu a) với $a + d = -(b + c)$, ta cũng nhận được:

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3(b + c)(ad - bc). \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra điều cần chứng minh.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Phát biểu bằng lời, viết công thức và chứng minh hằng đẳng thức *lập phương của một tổng*.

IV.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1.

a. Tính $(3x + 2y)^3$.

b. Tính nhẩm 101^3.

Bài tập 2. Viết các biểu thức sau dưới dạng lập phương của một tổng:

a. $27x^3 + 27x^2 + 9x + 1$.

b. $x^3 + 3\sqrt{2}x^2y + 6xy^2 + 2\sqrt{2}y^3$.

Bài tập 3. Tìm x, biết:

$$(x + 1)^3 - x(x - 2)^2 + x - 1 = 0.$$

Bài tập 4. Tính giá trị của biểu thức:

$$P = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \text{ với } x = 99.$$

Bài tập 5. Tính giá trị của biểu thức:

$$Q = (x^3 + 6x^2 + 12x + 8) + 3(x^2 + 4x + 4)y + 3(x + 2)y^2 + y^3$$

với $x + y = 8$.

Bài tập 6. Tính giá trị của biểu thức:

$$R = (8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3) + 3(4x^2 + 4xy + y^2)y + 3(2x + y)y^2 + y^3$$

với $x + y = 50$.

Bài tập 7. Chứng minh hằng đẳng thức:

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b).$$

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 2.

a. Ta có:

$$27x^3 + 27x^2 + 9x + 1 = (3x + 1)^3.$$

b. Ta có:

$$x^3 + 3\sqrt{2}x^2y + 6xy^2 + 2\sqrt{2}y^3 = (x + \sqrt{2}y)^3.$$

Bài tập 3. Ta có:

$$(x + 1)^3 - x(x - 2)^2 + x - 1 = 7x^2.$$

Do đó:

$$(x + 1)^3 - x(x - 2)^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow 7x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Bài tập 4. Trước hết ta viết lại P dưới dạng:

$$P = (x + 1)^3,$$

khi đó, với $x = 99$ ta được:

$$P = (99 + 1)^3 = 100^3 = 1000000.$$

Bài tập 5. Trước hết ta viết lại Q dưới dạng:

$$Q = (x + 2)^3 + 3(x + 2)^2y + 3(x + 2)y^2 + y^3 = (x + 2 + y)^3,$$

khi đó, với $x + y = 8$ ta được:

$$Q = (8 + 2)^3 = 10^3 = 1000.$$

Hằng đẳng thức 5 — LẬP PHƯƠNG CỦA MỘT HIỆU

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Ta có:

$$(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$$

Đọc là " *Lập phương của một hiệu hai biểu thức bằng lập phương biểu thức thứ nhất trừ ba lần tích bình phương biểu thức thứ nhất với biểu thức thứ hai cộng ba lần tích biểu thức thứ nhất với bình phương biểu thức thứ hai trừ lập phương biểu thức thứ hai* ".

Để chứng minh hằng đẳng thức, ta có thể lựa chọn một trong ba cách:

Cách 1: Thực hiện phép biến đổi:

$$\begin{aligned} VT &= (A - B)^3 = (A - B)(A - B)^2 = (A - B)(A^2 - 2AB + B^2) \\ &= A(A^2 - 2AB + B^2) - B(A^2 - 2AB + B^2) \\ &= A^3 - 2A^2B + AB^2 - BA^2 + 2AB^2 - B^3 \\ &= A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3, \text{ đpcm.} \end{aligned}$$

Cách 2: Thực hiện phép tách:

$$VP = A^3 - 2A^2B - A^2B + AB^2 + 2AB^2 - B^3$$
$$= (A^3 - 2A^2B + AB^2) - (A^2B - 2AB^2 + B^3)$$
$$= A(A^2 - 2AB + B^2) - B(A^2 - 2AB + B^2)$$
$$= A(A - B)^2 - B(A - B)^2 = (A - B)^2(A - B) = (A - B)^3.$$

Cách 3: Tận dụng hằng đẳng thức về lập phương của một tổng:

$$VT = (A - B)^3 = [A + (-B)]^3 = A^3 + 3A^2(-B) + 3A(-B)^2 + (-B)^3$$
$$= A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3, \text{ đpcm.}$$

Chú ý: Trong một vài trường hợp, ta lựa chọn cách viết:

$$(A - B)^3 = A^3 - B^3 - 3AB(A - B).$$

II. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1:

a. Tính $(x - \sqrt{2}\,y)^3$.

b. Không dùng máy tính hãy tính 99^3.

Giải

a. Ta có:

$$(x - \sqrt{2}\,y)^3 = x^3 - 3x^2(\sqrt{2}\,y) + 3x.(\sqrt{2}\,y)^2 - (\sqrt{2}\,y)^3$$
$$= x^3 - 3\sqrt{2}\,x^2y + 6xy^2 - 2\sqrt{2}\,y^3.$$

b. Ta có:

$$99^3 = (100 - 1)^3 = 100^3 - 3.100^2.1 + 3.100.1 - 1^3 = 970299.$$

Ví dụ 2: Viết các biểu thức sau dưới dạng lập phương của một hiệu:

a. $8 - 12x + 6x^2 - x^3$. b. $x^6 - 3x^5 + 3x^4 - x^3$.

Giải

a. Ta có:

$$8 - 12x + 6x^2 - x^3 = 2^3 - 3.2^2x + 3.2.x^2 - x^3 = (2 - x)^3.$$

b. Ta có:

$$x^6 - 3x^5 + 3x^4 - x^3 = (x^2)^3 - 3(x^2)^2x + 3x^2(x)^2 - (x)^3 = (x^2 - x)^3.$$

Ví dụ 3: Chứng minh rằng:

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) + (x - y)(x^2 + xy + y^2) = 2x^3.$$

Giải

Ta có:

$$VT = x^3 + y^3 + x^3 - y^3 = 2x^3, \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 4: Rút gọn biểu thức rồi tính giá trị với x = -2:

$$P = (x - 1)^3 - 4x(x + 1)(x - 1) + 3(x - 1)(x^2 + x + 1).$$

Giải

Ta có:

$$P = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - 4x(x^2 - 1) + 3(x^3 - 1)$$
$$= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - 4x^3 + 4x + 3x^3 - 3 = -3x^2 + 7x - 4.$$

Thay $x = -2$ vào biểu thức được:

$$P = -3(-2)^2 + 7(-2) - 4 = -3.4 - 14 - 4 = -12 - 14 - 4 = -30.$$

Ví dụ 5: Biết $x - y = 12$, tính giá trị của biểu thức:

$$P = (x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3) - 6(x^2 - 2xy + y^2) + 12(x - y) - 8$$

Giải

Ta có:

$$P = (x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3) - 6(x^2 - 2xy + y^2) + 12(x - y) - 8$$
$$= (x - y)^3 - 3(x - y)^2.2 + 3(x - y).2^2 - 2^3 = (x - y - 2)^3.$$

suy ra $P = (12 - 2)^3 = 1000$.

Ví dụ 6: Rút gọn biểu thức:

$$A = (a + b + 1)^3 - (a + b - 1)^3 - 6(a + b)^2.$$

Giải

Ta thấy biểu thức $a + b$ được lặp lại nhiều lần, để cho gọn, ta đặt $a + b = x$. Do đó:

$$A = (x + 1)^3 - (x - 1)^3 - 6x^2 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) - 6x^2$$
$$= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x^3 + 3x^2 - 3x + 1 - 6x^2 = 2.$$

Chú ý: Hãy so sánh cách giải trên với cách giải thông thường sau để thấy ưu điểm của lời giải bằng cách đổi biến như trên.

Cách 1: Ta viết:

$$A = (a + b + 1)(a + b + 1)(a + b + 1)$$
$$- (a + b - 1)(a + b - 1)(a + b - 1) - 6(a^2 - 2ab + b^2)$$

Cách 2: Ta viết:

$$A = [(a + b) + 1]^3 - [(a + b) - 1]^3 - 6(a + b)^2$$
$$= [(a + b)^3 + 3(a + b)^2 + 3(a + b) + 1]$$
$$- [(a + b)^3 - 3(a + b)^2 + 3(a + b) - 1] - 6(a^2 - 2ab + b^2)$$

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Phát biểu bằng lời, viết công thức và chứng minh hằng đẳng thức *lập phương của một hiệu*.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1.

a. Tính $(2\sqrt{2}x - 3y)^3$.

b. Tính nhẩm 9^3.

Bài tập 2. Viết các biểu thức sau dưới dạng lập phương của một hiệu:

a. $27x^3 - 27x^2 + 9x - 1$.

b. $3\sqrt{3}x^3 - 18x^2 + 12\sqrt{3}x - 8$.

Bài tập 3. Tìm x, biết:

$$(x - 2)^3 - x^2(x - 6) = 4.$$

Bài tập 4. Biểu thức sau có phụ thuộc vào biến x không ?

$$(x + 2)^3 - (x - 2)^3 - 12x^2.$$

Bài tập 5. Chứng minh hằng đẳng thức:

$$(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b).$$

Bài tập 6. Tính giá trị của biểu thức sau:

$$x^3 - 3x^2 + 3x \text{ với } x = 11.$$

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 2.

a. Ta có:

$$27x^3 - 27x^2 + 9x - 1 = (3x - 1)^3.$$

b. Ta có:

$$3\sqrt{3}x^3 - 18x^2 + 12\sqrt{3}x - 8 = (\sqrt{3}x - 2)^3.$$

Bài tập 3. Ta có:

$$(x - 2)^3 - x^2(x - 6) = 12x - 8.$$

Do đó:

$$(x - 2)^3 - x^2(x - 6) = 4 \Leftrightarrow 12x - 8 = 4 \Leftrightarrow 12x = 12 \Leftrightarrow x = 1.$$

Bài tập 4. Biến đổi biểu thức:

$$(x+2)^3 - (x-2)^3 - 12x^2 = (x^3+6x^2+3x+8) - (x^3-6x^2+3x-8) - 12x^2 = 16.$$

Vậy, biểu thức không phụ thuộc vào x.

Hằng đẳng thức 6 — TỔNG HAI LẬP PHƯƠNG

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Ta có:

$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$$

Đọc là "*Tổng hai lập phương bằng tổng hai biểu thức nhân với bình phương thiếu của hiệu hai biểu thức đó*".

Để chứng minh hằng đẳng thức, ta có thể lựa chọn một trong hai cách:

Cách 1: Thực hiện phép biến đổi:

$$VP = (A + B)(A^2 - AB + B^2) = A(A^2 - AB + B^2) + B(A^2 - AB + B^2)$$

$$= A^3 - A^2B + AB^2 + A^2B - AB^2 + B^3 = A^3 + B^3, \text{ đpcm.}$$

Cách 2: Ta có:

$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

$$\Leftrightarrow A^3 + B^3 = (A+B)^3 - 3AB(A+B) = (A+B)[(A+B)^2 - 3AB]$$

$$= (A+B)(A^2 - AB + B^2), \text{ đpcm.}$$

Trong nhiều trường hợp, ta sử dụng công thức:

$$A^3 + B^3 = (A+B)^3 - 3AB(A+B)$$

thí dụ với yêu cầu:

" *Tính giá trị của* $A^3 + B^3$ *biết* $A + B = p$ *và* $AB = q$ ".

Mở rộng: Tổng hai luỹ thừa cùng bậc lẻ:

$$A^{2n+1} + B^{2n+1} = (A+B)(A^{2n} - A^{2n-1}B + \ldots - AB^{2n-1} + B^{2n}).$$

từ đó suy ra được một hệ quả quen thuộc rằng:

" *Nếu* $a, b \in Z$ *và* $a + b \neq 0$ *thì* $a^{2n+1} + b^{2n+1}$ *chia hết cho* $a + b$ *với* $\forall n \in N$ ".

II. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1: Viết các đa thức sau dưới dạng tích:

a. $8x^3 + 1$.

b. $x^3 - (x - y)^3$.

Giải

a. Ta có:

$$8x^3 + 1 = (2x)^3 + 1 = (2x+1)[(2x)^2 - 2x.1 + 1]$$

$$= (2x+1)(4x^2 - 2x + 1).$$

b. Ta có:

$$x^3 - (x-y)^3 = x^3 + (y-x)^3$$

$$= (x + y - x)[x^2 - x(y-x) + (y-x)^2]$$

$$= y(3x^2 - 3xy + y^2).$$

Ví dụ 2: Chứng minh rằng:

$$a^3 + b^3 = (a+b)[(a-b)^2 + ab].$$

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1: Biến đổi vế trái của đẳng thức:

$$VT = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b)[(a^2 - 2ab + b^2) + ab]$$

$$= (a+b)[(a-b)^2 + ab], \text{ đpcm.}$$

Cách 2: Biến đổi vế phải của đẳng thức:

$$VP = (a+b)[(a^2 - 2ab + b^2) + ab]$$

$$= (a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3, \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 3: Tính nhanh các kết quả sau:

$$A = \frac{2004^3 + 1}{2004^2 - 2003}.$$

Giải

Ta có:

$$A = \frac{2004^3 + 1}{2004^2 - 2003} = \frac{(2004 + 1)(2004^2 - 2004 + 1)}{2004^2 - 2004 + 1} = 2004 + 1 = 2005.$$

Ví dụ 4: Biết $x + y = 7$ và $xy = 10$, tính giá trị của biểu thức:

$$P = (x + y)(x^2 + y^2)(x^3 + y^3).$$

Giải

Biến đổi biểu thức P về dạng:

$$P = (x + y)[(x + y)^2 - 2xy][(x + y)^3 - 3xy(x + y)].$$

Khi đó, với $x + y = 7$ và $xy = 10$, ta nhận được:

$$P = 7(7^2 - 2.10)(7^3 - 3.10.7) = 7.29.133 = 26999.$$

Ví dụ 5: Tìm x, biết:

$$(x + 2)(x^2 - 2x + 4) - x(x^2 + 2) = 0.$$

Giải

Ta có:

$$(x + 2)(x^2 - 2x + 4) - x(x^2 + 2) = (x + 2)(x^2 - x.2 + 2^2) - x(x^2 + 2)$$
$$= x^3 + 8 - x^3 - 2x = 8 - 2x.$$

Khi đó, ta được:

$$8 - 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4.$$

Vậy, với $x = 4$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Phát biểu bằng lời, viết công thức và chứng minh hằng đẳng thức *tổng hai lập phương*.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Rút gọn biểu thức rồi tính giá trị của biểu thức với $x = -5$:

$$P = (x - 1)^3 - (x + 2)(x^2 - 2x + 4) + 3(x + 4)(x - 4).$$

Bài tập 2. Giá trị của biểu thức sau có phụ thuộc vào biến x không ?

$$P = 8x^3 - 5 - (2x + 1)(4x^2 - 2x + 1).$$

Bài tập 3. Viết các biểu thức sau dưới dạng một tích hai đa thức:

a. $27 + x^3$. b. $64x^3 + 0,001$.

Bài tập 4. Tìm x, biết:

$$(x - 1)^3 - (x + 3)(x^2 - 3x + 9) + 3(x^2 - 4) = 2.$$

Bài tập 5. Tìm các số x và y biết rằng:

$$x^3 + y^3 = 152,\ x^2 - xy + y^2 = 19,\ x - y = 2.$$

Bài tập 6. Cho $x + y = 2$, $x^2 + y^2 = 20$. Tính $x^3 + y^3$.

Bài tập 7. Chứng minh rằng nếu hai số tự nhiên a và b có tổng chia hết cho 3 thì tổng các lập phương của chúng chia hết cho 3.

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1. Ta có:

$$P = (x - 1)^3 - (x + 2)(x^2 - 2x + 4) + 3(x + 4)(x - 4) = 3x - 57.$$

Do đó, với $x = -5$, ta được:

$$P = 3(-5) - 57 = -72.$$

Bài tập 2. Ta có:

$$P = 8x^3 - 5 - (2x + 1)(4x^2 - 2x + 1) = 8x^3 - 5 - (8x^3 + 1) = -6.$$

Vậy, biểu thức P không phụ thuộc x.

Bài tập 3.

a. Ta có:

$$27 + x^3 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9).$$

b. Ta có:

$$64x^3 + 0,001 = 64x^3 + \frac{1}{10^3} = (4x + \frac{1}{10})(16x^2 - \frac{2x}{5} + \frac{1}{100}).$$

Bài tập 4. Ta có:

$$(x - 1)^3 - (x + 3)(x^2 - 3x + 9) + 3(x^2 - 4) = 3x - 40.$$

Do đó:

$$(x - 1)^3 - (x + 3)(x^2 - 3x + 9) + 3(x^2 - 4) = 2$$

$$\Leftrightarrow 3x - 40 = 2 \Leftrightarrow 3x = 42 \Leftrightarrow x = 14.$$

Vậy, với $x = 14$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 5. Ta có:

$$152 = x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = 19(x + y)$$

$$\Leftrightarrow x + y = 8 \Leftrightarrow 2 + y + y = 8 \Leftrightarrow 2y = 6 \Leftrightarrow y = 3 \Rightarrow x = 5.$$

Bài tập 6. Ta có:

$$20 = x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 2^2 - 2xy \Leftrightarrow xy = -8.$$

Khi đó:

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 2^3 - 3(-8).2 = 56.$$

Hằng đẳng thức 7 HIỆU HAI LẬP PHƯƠNG

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Ta có:

$$\boxed{A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)}$$

Đọc là " *Hiệu hai lập phương bằng hiệu hai biểu thức nhân với bình phương thiếu của tổng hai biểu thức đó* ".

Để chứng minh hằng đẳng thức, ta có thể lựa chọn một trong hai cách:

Cách 1: Thực hiện phép biến đổi:

$$VP = (A - B)(A^2 + AB + B^2) = A(A^2 + AB + B^2) - B(A^2 + AB + B^2)$$
$$= A^3 + A^2B + AB^2 - A^2B - AB^2 - B^3 = A^3 - B^3, \text{ đpcm.}$$

Cách 2: Tận dụng hằng đẳng thức về tổng hai lập phương:

$$VT = A^3 - B^3 = A^3 + (-B)^3 = [A + (-B)][A^2 - A(-B) + (-B)^2]$$
$$= (A - B)(A^2 + AB + B^2), \text{ đpcm.}$$

Trong nhiều trường hợp, ta sử dụng công thức:

$$A^3 - B^3 = (A - B)^3 + 3AB(A - B)$$

thí dụ với yêu cầu "*Tính giá trị của $A^3 - B^3$ biết $A - B = p$ và $AB = q$*".

Mở rộng: Hiệu hai luỹ thừa tổng quát:

$$A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + ... + AB^{n-2} + B^{n-1}), \text{ với } n \in N$$

từ đó ra suy ra được hai hệ quả quen thuộc:

1. $a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + ... + a + 1)$, với $n \in N$
2. "*Nếu $a, b \in Z$ và $a \neq b$ thì $a^n - b^n$ chia hết cho $a - b$ với $\forall n \in N$*".

II. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1: Rút gọn biểu thức:

$$(x - 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1).$$

Giải

Ta có:

$$(x - 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$$
$$= [(x - 1)(x^2 + x + 1)][(x + 1)(x^2 - x + 1)]$$
$$= (x^3 - 1)(x^3 + 1) = x^6 - 1.$$

Ví dụ 2: Tính nhanh kết quả sau:

$$A = \frac{2005^3 - 1}{2005^2 + 2006}.$$

Giải

Ta có:

$$A = \frac{2005^3 - 1}{2005^2 + 2006} = \frac{(2005 - 1)(2005^2 + 2005 + 1)}{2005^2 + 2005 + 1} = 2005 - 1 = 2004.$$

Ví dụ 3: Rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{x^{26} + x^{24} + x^{22} + ... + x^2 + 1}{x^{24} + x^{20} + x^{16} + ... + x^4 + 1}.$$

Giải

Ta lần lượt rút gọn tử số và mẫu số:

- Với tử số, bằng phép đặt $a = x^2$, ta nhận được:

$$TS = a^{13} + a^{12} + a^{11} + ... + a + 1$$
$$= \frac{(a - 1)(a^{13} + a^{12} + a^{11} + ... + a + 1)}{a - 1} = \frac{a^{14} - 1}{a - 1} = \frac{x^{28} - 1}{x^2 - 1}.$$

- Với mẫu số, bằng phép đặt $b = x^4$, ta nhận được:

$$TS = b^6 + b^5 + b^4 + ... + b + 1$$

$$= \frac{(b-1)(b^6 + b^5 + b^4 + ... + b + 1)}{b-1} = \frac{b^7 - 1}{b - 1} = \frac{x^{28} - 1}{x^4 - 1}.$$

Suy ra:

$$A = \frac{\dfrac{x^{28} - 1}{x^2 - 1}}{\dfrac{x^{28} - 1}{x^4 - 1}} = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{x^2 - 1} = x^2 + 1.$$

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Phát biểu bằng lời, viết công thức và chứng minh hằng đẳng thức *hiệu hai lập phương*.

Câu hỏi 2: Hãy phân tích:

$a^6 - 1$.

$a^6 - b^6$.

$a^3 - (b + c)^3$.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Rút gọn biểu thức:

a. $A = \dfrac{x^{95} + x^{94} + x^{93} + ... + x + 1}{x^{31} + x^{30} + x^{29} + ... + x + 1}$.

b. $B = \dfrac{x^{39} + x^{36} + x^{33} + ... + x^3 + 1}{x^{40} + x^{38} + x^{36} + ... + x^2 + 1}$.

Bài tập 2. Viết các biểu thức sau dưới dạng một tích hai đa thức:

a. $8 - 27x^3$.   b. $\dfrac{x^3}{125} - \dfrac{y^3}{27}$.

Bài tập 3. Tìm x, biết:

$$(x + 1)(x^2 + x + 1)(x - 1)(x^2 - x + 1) = 7.$$

Bài tập 4. Tìm x, biết:

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) - x(x + 2)(x - 2) = 5.$$

Bài tập 5. Rút gọn biểu thức rồi tính giá trị của biểu thức với x = - 3:

$$P = 27 + (x - 3)(x^2 + 3x + 9).$$

Bài tập 6.

a. Chứng minh rằng $11^{100} - 1$ chia hết cho 1000.

b. Từ đó chứng minh kết quả tổng quát $(a + 1)^a - 1$ chia hết cho a với $\forall a \in N$ và $a \neq 0$.

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. Ta có:

$$A = \frac{(x-1)(x^{95}+x^{94}+x^{93}+\ldots+x+1)}{(x-1)(x^{31}+x^{30}+x^{29}+\ldots+x+1)} = \frac{x^{96}-1}{x^{32}-1}$$

$$= \frac{(x^{32}-1)(x^{64}+x^{32}+1)}{x^{32}-1} = x^{64}+x^{32}+1.$$

b. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 2.

a. Ta có:

$$8-27x^3 = (2-3x)(4+6x+9x^2).$$

b. Ta có:

$$\frac{x^3}{125}-\frac{y^3}{27} = \left(\frac{x}{5}-\frac{y}{3}\right)\left(\frac{x^2}{25}+\frac{xy}{15}+\frac{y^2}{9}\right).$$

Bài tập 3. Ta có

$$(x+1)(x^2+x+1)(x-1)(x^2-x+1) = (x^3+1)(x^3-1) = x^6-1.$$

Do đó:

$$(x+1)(x^2+x+1)(x-1)(x^2-x+1) = 7$$

$$\Leftrightarrow x^6-1 = 7 \Leftrightarrow x^6 = 8 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}.$$

Vậy, với $x = \sqrt{2}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 4. Ta có

$$(x-1)(x^2+x+1) - x(x+2)(x-2) = 4x-1.$$

Do đó:

$$(x-1)(x^2+x+1) - x(x+2)(x-2) = 5$$

$$\Leftrightarrow 4x-1 = 5 \Leftrightarrow 4x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Vậy, với $x = \frac{3}{2}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Hằng đẳng thức MỞ RỘNG

TỔNG BA LẬP PHƯƠNG VÀ CÁC ỨNG DỤNG

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Ta có:

$$A^3 + B^3 + C^3 = (A + B + C)(A^2 + B^2 + C^2 - AB - BC - CA) + 3ABC$$
$$A^3 + B^3 + C^3 = (A + B + C)^3 - 3(A + B)(B + C)(C + A)$$

Việc chứng minh hằng đẳng thức trên xin được dành cho bạn đọc, còn trong mục này chúng ta sẽ đi sâu vào việc khai thác nó để giải một vài dạng toán mà kết quả nhận được rất ngạc nhiên, thí dụ:

- Xuất phát từ hằng đẳng thức thứ nhất, ta nhận thấy nếu:

$$A^3 + B^3 + C^3 = 3ABC$$
$$\Leftrightarrow (A + B + C)(A^2 + B^2 + C^2 - AB - BC - CA) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A + B + C = 0 \\ A^2 + B^2 + C^2 - AB - BC - CA = 0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A + B + C = 0 \\ (A - B)^2 + (B - C)^2 + (C - A)^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A + B + C = 0 \\ A = B = C \end{array}\right.$$

- Xuất phát từ hằng đẳng thức thứ hai, ta nhận thấy nếu:

$$A^3 + B^3 + C^3 = (A + B + C)^3 \Leftrightarrow (A + B)(B + C)(C + A) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = -B \\ B = -C \\ C = -A \end{array}\right.$$

II. CÁC ỨNG DỤNG

Trước hết chúng ta minh hoạ ví dụ sử dụng hằng đẳng thức trên để đơn giản biểu thức.

Ví dụ 1: Rút gọn biểu thức:

$$A = (a + b + c)^3 - (a + b - c)^3 - (b + c - a)^3 - (c + a - b)^3.$$

Giải

Để thuận tiện ta sử dụng ẩn phụ:

$$\begin{cases} x = a + b - c \\ y = b + c - a \Rightarrow x + y + z = a + b + c. \\ z = c + a - b \end{cases}$$

Khi đó:

$$A = (x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(x + y)(y + z)(z + x)$$
$$= 3.2b.2c.2a = 24abc.$$

Nhận xét: 1. Nếu cho thêm giả thiết về các số a, b, c bài toán có thể được phát biểu dưới dạng yêu cầu chứng minh về tính chia hết.

2. Tiếp theo chúng ta sẽ sử dụng hằng đẳng thức trên để thực hiện một vài phép biến đổi đại số và cụ thể ở đây là việc trục căn thức bậc ba ở mẫu số.

Ví dụ 2: Với abc = 1, hãy thực hiện phép trục căn thức ở mẫu cho biểu thức:

$$A = \frac{1}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}}.$$

Giải

Thực hiện phép nhân cả tử và mẫu số của A với

$$(\sqrt[3]{a})^2 + (\sqrt[3]{b})^2 + (\sqrt[3]{c})^2 - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{ca}$$

ta được:

$$A = \frac{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{c^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{ca}}{a + b + c - 3\sqrt[3]{abc}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{c^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{ca}}{a + b + c - 3}$$

Chú ý: Tiếp theo chúng ta sẽ minh hoạ các ví dụ sử dụng hằng đẳng thức trên để tính giá trị của biểu thức.

Ví dụ 3: Biết a + b + c = 0, tính giá trị của các biểu thức:

$$A = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$$

Giải

Ta có ngay:

$$A = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 0.$$

Ví dụ 4: Biết ab + bc + ca = 0 và abc ≠ 0, tính giá trị của các biểu thức:

$$A = \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} + \frac{ab}{c^2}.$$

Giải

Từ giả thiết ta có:

$$ab + bc + ca = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0 \Rightarrow \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{3}{abc}.$$

Khi đó:

$$A = \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} + \frac{ab}{c^2} = \frac{abc}{a^3} + \frac{bca}{b^3} + \frac{cab}{c^3}$$

$$= abc\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right) = abc.\frac{3}{abc} = 3.$$

Nhận xét: Ở hai ví dụ trên chúng ta đã sử dụng điều kiện xuôi để tính giá trị của biểu thức, ví dụ tiếp theo sẽ minh hoạ việc sử dụng điều kiện ngược lại để tính giá trị của biểu thức.

Ví dụ 5: Biết $a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 = 3a^2b^2c^2$, tính giá trị của các biểu thức:

$$A = \left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right).$$

Giải

Nếu đặt: $\begin{cases} x = ab \\ y = bc \\ z = ca \end{cases}$

ta có:

1. Biểu thức A được chuyển về dạng:

$$A = \left(1 + \frac{z}{y}\right)\left(1 + \frac{x}{z}\right)\left(1 + \frac{y}{x}\right).$$

2. Điều kiện của giả thiết được biến đổi về dạng:

$$a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 = 3a^2b^2c^2 \Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ x = y = z \end{array}\right.$$

Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với $x + y + z = 0$, ta có:

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x + y)(y + z)(z + x)$$

$$\Leftrightarrow 3xyz = (x + y)(y + z)(z + x).$$

suy ra:

$$A = \left(1 + \frac{z}{y}\right)\left(1 + \frac{x}{z}\right)\left(1 + \frac{y}{x}\right) = \frac{y+z}{y}\cdot\frac{z+x}{z}\cdot\frac{x+y}{x} = \frac{3xyz}{xyz} = 3.$$

Trường hợp 2: Với $x = y = z$, ta có ngay:

$$A = (1 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 8.$$

Ví dụ 6: Biết $a^3 - b^3 = 3ab + 1$, tính giá trị của các biểu thức:

$$A = a - b.$$

Giải

Biến đổi giả thiết về dạng:

$$a^3 - b^3 = 3ab + 1 \Leftrightarrow a^3 + (-b)^3 + (-1)^3 = 3a(-b)(-1)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a + (-b) + (-1) = 0 \\ a = -b = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a - b = 1 \\ a - b = -2 \end{array}\right..$$

Chú ý: Tiếp theo chúng ta sẽ sử dụng hằng đẳng thức trên để giải phương trình.

Ví dụ 7: Giải các phương trình:

a. $x^3 + 16 = 12x$.

b. $(x - 2)^3 + (x + 1)^3 + (1 - 2x)^3 = 0$.

Giải

a. Viết lại phương trình dưới dạng:

$$x^3 + 2^3 + 2^3 = 3.2.2.x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 2 + 2 = 0 \\ x = 2 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4 \\ x = 2 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = -4$ và $x = 2$.

b. Sử dụng hằng đẳng thức biến đổi phương trình về dạng:

$$(x - 2)^3 + (x + 1)^3 + (1 - 2x)^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2 + x + 1 + 1 - 2x)[(x - 2)^2 + (x + 1)^2 + (1 - 2x)^2 -$$
$$(x-2)(x+1)(1-2x)] + 3(x - 2)(x + 1)(1 - 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x + 1)(1 - 2x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -1 \\ x = 1/2 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm $x = 2$, $x = -1$ và $x = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 8: Giải phương trình:

$$\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2} + \sqrt[3]{x-3} = 0.$$

Giải

Với phép đặt $a = \sqrt[3]{x-1}$, $b = \sqrt[3]{x-2}$, $c = \sqrt[3]{x-3}$, ta viết được phương trình dưới dạng:

$$a + b + c = 0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

$$\Leftrightarrow (x - 1) + (x - 2) + (x - 3) = 3\sqrt[3]{x-1}\,\sqrt[3]{x-2}\,\sqrt[3]{x-3}$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = \sqrt[3]{(x-1)(x-2)(x-3)} \Leftrightarrow (x - 2)^3 = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)[(x - 2)^2 - (x - 1)(x - 3)] = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Thử lại, thấy $x = 2$ thoả mãn.

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 2$.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho ba số nguyên a, b, c thoả mãn:

$$a + b + c = (a - b)(b - c)(c - a).$$

Chứng minh rằng $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$ chia hết cho 81.

Bài tập 2. Hãy thực hiện phép trục căn thức ở mẫu cho các biểu thức:

a. $A = \dfrac{1}{1 + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}}$.

b. $B = \dfrac{1}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}}$, với abc = 8.

Bài tập 3. Biết a + b + c = 0, tính giá trị của các biểu thức:

$$A = [ab(a - b) + bc(b - c) + ca(c - a)] \times \left[\frac{1}{ab(a - b)} + \frac{1}{bc(b - c)} + \frac{1}{ca(c - a)}\right].$$

Bài tập 4. Biết $a^3 + b^3 = 3ab - 1$, tính giá trị của các biểu thức:

$$A = a + b.$$

Bài tập 5. Biết x + y + z = 0, chứng minh rằng:

$$2(x^5 + y^5 + z^5) = 5xyz(x^2 + y^2 + z^2).$$

Bài tập 6. Biết $a^n + b^n + c^n = x^n + y^n + z^n$ với n = 1, 2, 3, chứng minh rằng nó cũng đúng với mọi số tự nhiên n.

Bài tập 7. Biết:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ bx + cy = a \\ cx + ay = b \end{cases}.$$

Chứng minh rằng:

$$a^5 + b^5 + c^5 = 3abc.$$

Bài tập 8. Giải các phương trình:

a. $x^3 - 3x + 2 = 0$.

b. $6x^3 + 3x - 5 = 0$.

c. $(x - 3)^3 + (x + 1)^3 + (2 - 2x)^3 = 0$.

d. $(x - 3)^3 + (2x - 3)^3 = 27(x - 2)^3$.

e. $\sqrt[3]{x + 1} + \sqrt[3]{x + 2} + \sqrt[3]{x + 3} = 0$.

f. $(ax + b)^3 + (bx + a)^3 = (a + b)^3(x + 1)^3$.

CHỦ ĐỀ 3

PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

Việc biến đổi:

$$2x^2 - 16x = 2x.x - 8.2x = 2x(x - 8) \quad (1)$$

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) \quad (2)$$

$$xy + 2x + 3y + 6 = x(y + 2) + 3(y + 2) = (y + 2)(x + 3) \quad (3)$$

được gọi là *phân tích đa thức thành nhân tử.*

Định nghĩa: *Phân tích đa thức thành nhân tử (hay thành thừa số) là phép biến đổi đa thức cho trước thành tích của những đơn thức hoặc đa thức.*

Kí hiệu: $A = A_1 . A_2 .... A_n$. (4)

Có nhiều phương pháp phân tích đa thức thành nhân tư, bao gồm:

Phương pháp 1. Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp đặt nhân tử chung - Minh hoạ bởi (1).

Phương pháp 2. Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp dùng hằng đẳng thức - Minh hoạ bởi (2).

Phương pháp 3. Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp nhóm hạng tử - Minh hoạ bởi (3).

Phương pháp 4. Phân tích đa thức thành nhân tử bằng cách tách một hạng tử thành nhiều hạng tử.

Phương pháp 5. Phân tích đa thức thành nhân tử bằng cách thêm bớt cùng một hạng tử thích hợp.

Phương pháp 6. Phân tích đa thức thành nhân tử bằng cách phối hợp nhiều phương pháp.

Hẳn các em học sinh sẽ đặt câu hỏi " *Mục đích của việc phân tích đa thức thành nhân tử để làm gì ?* ", câu trả lời là "*Có rất nhiều tác dụng* ".

Chúng ta sẽ khai thác đôi chút thông qua (4) như sau:

a. Giả sử $A_1 = 3$ và các $A_2, ..., A_n$ nguyên, ta có ngay kết luận A chia hết cho 3. Như vậy, việc phân tích đa thức thành nhân tử cho phép chúng ta giải được *bài toán xét tính chia hết*.

b. Với yêu cầu giải phương trình $A=0$, ta được $A_1=0$ hoặc $A_2=0$ ... hoặc $A_n=0$. Như vậy, việc phân tích đa thức thành nhân tử cho phép chúng ta giải được *phương trình*.

Đó cũng chính là hai ứng dụng quen thuộc, ngoài ra nó còn giúp chúng ta thực hiện nhanh phép tính giá trị của một biểu thức.

Bài toán 1 PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT NHÂN TỬ CHUNG

I. PHƯƠNG PHÁP

Giả sử cần phân tích đa thức A + B thành nhân tử, ta đi xác định trong A và B nhân tử chung C, khi đó:

$$A + B = C.A_1 + C.B_1 = C(A_1 + B_1).$$

Cách làm như vậy được gọi là *phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp đặt nhân tử chung.*

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a. $8xy^2 - 2x^2y$.

b. $9x^3(2y - z) - 12x(2y - z)^2$.

Giải

a. Ta thấy:

$$8xy^2 = 2xy.4y.$$
$$2x^2y = 2xy.x.$$

Như vậy hai hạng tử của đa thức đều có nhân tử chung là 2xy, do đó có thể viết:

$$8xy^2 - 2x^2y = 2xy.4y - 2xy.x = 2xy(4y - x).$$

b. Ta có ngay:

$$9x^3(2y - z) - 12x(2y - z)^2 = 3x(2y - z).3x - 3x(2y - z).4(2y - z)$$
$$= 3x(2y - z)[3x - 4(2y - z)] = 3x(2y - z)(3x - 8y + z).$$

Chú ý: Nhiều khi cần đổi dấu để làm xuất hiện nhân tử chung (ta có tính chất A = − (−A), thí dụ như đa thức:

$$3x(y - z) + (z - y)(x + 2y)$$

sẽ được viết là:

$$3x(y - z) - (y - z)(x + 2y)$$

từ đó thấy xuất hiện nhân tử chung (y − z).

Ví dụ 2: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a. $4x^2(x - y) - 10y(y - x)$.

b. $2x(x - 1) - x(1 - x)^2 - (1 - x)$.

Giải

a. Ta có ngay:

$$4x^2(x-y) - 10y(y-x) = 2(x-y).2x^2 + 2(x-y).5y$$
$$= 2(x-y)(2x^2+5y)$$

b. Ta có ngay:

$$2x(x-1) - x(1-x)^2 - (1-x)^3 = 2x(x-1) - x(x-1)^2 + (x-1)^3$$
$$= (x-1)[2x - x(x-1) + (x-1)^2]$$
$$= (x-1)(2x - x^2 + x + x^2 - 2x + 1) = (x-1)(x+1).$$

Chú ý: Nhiều em học sinh khi thực hiện câu b) mắc phải lỗi đổi dấu:

$$(1-x)^2 = -(x-1)^2$$

hãy nhớ rằng:

$$A^{2n} = (-A)^{2n}$$
$$A^{2n+1} = -(-A)^{2n+1}$$

với n là số tự nhiên.

Ví dụ 3: Tính giá trị của biểu thức:

a. $15{,}8.35 + 15{,}8.65$.

b. $x(x-1) + y(1-x)$ tại $x = 2001$ và $y = 501$.

Giải

a. Ta có:

$$15{,}8.35 + 15{,}8.65 = 15{,}8(35+65) = 15{,}8.100 = 1580.$$

b. Ta có:

$$x(x-1) + y(1-x) = x(x-1) - y(x-1) = (x-y)(x-1)$$
$$= (2001-501)(2001-1) = 1500.2000 = 3000000.$$

Ví dụ 4: Tìm x biết:

$$2x(x-3) - 5(3-x) = 0.$$

Giải

Ta có:

$$2x(x-3) - 5(3-x) = 2x(x-3) + 5(x-3) = (x-3)(2x+5)$$

nên ta được:

$$(x-3)(2x+5) = 0. \qquad (*)$$

Từ (*) tính được các nghiệm số $x = 3$, $x = -\frac{5}{2}$.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a. $6x^3 - 9x^2$.

b. $x^3 - x^4$.

c. $4x^2y - 8xy^2 + 18x^2y^2$.

d. $-8x^4y^3 - 12x^2y^4 + 20x^3y^4$.

Bài tập 2. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a. $18x^2y - 12x^3$.

b. $3xy^2 + 6xyz$.

c. $x^{m+2} - x^m$.

d. $5x^{m+2} + 10x^2$.

Bài tập 3. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a. $5x(x-1)-3y(x-1)$.

b. $3x(x+5)-2(5+x)$.

c. $2a(x+y)-3b(x+y)$.

d. $2a(x-1)+b(x-1)-(x-1)$.

Bài tập 4. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a. $3x^3(2y-3z)-15x(2y-3z)^2$.

b. $9x^2(y+z)+3(y+z)^2$.

c. $(x+1)^2-3(x+1)$.

d. $2x(x-2)-(x-2)^2$.

Bài tập 5. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a. $3x(x+2)+5(-x-2)$.

b. $7x(x-y)-(y-x)$.

c. $5x(x-1)-(1-x)$.

d. $4x(x-y)+3(y-x)^2$.

e. $x(x-1)+(1-x)^2$.

f. $3x(x-1)^2-(1-x)^3$.

Bài tập 6. Tính nhẩm:

a. $12{,}6.124-12{,}6.24$.

b. $18{,}6.45+18{,}6.55$.

c. $21{,}3.128-21{,}3.28$.

d. $7{,}\ 2.137+28.13{,}7$.

e. $14.15{,}2+43.30{,}4$.

f. $5+10+15+20+25+30+35+40+45+50$.

Bài tập 7. Tính giá trị của biểu thức:

$$P=x(2y-z)+y(z-2y) \text{ tại } x=116,\ y=16 \text{ và } z=2.$$

Bài tập 8. Tìm x biết:

a. $x^3=x^5$.

b. $4x(x+1)=8(x+1)$.

Bài tập 9. Tìm x biết:

a. $x(x-1)-2(1-x)=0$.

b. $2x(x-2)-(2-x)^2=0$.

c. $(x-3)^3+3-x=0$.

d. $5x(x-2)-(2-x)=0$.

IV. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. $6x^3-9x^2=3x^2(2x-3)$.

b. $x^3-x^4=x^3(1-x)$.

c. $4x^2y-8xy^2+18x^2y^2=2xy(2x-4xy+9xy)$.

d. $-8x^4y^3-12x^2y^4+20x^3y^4=4x^2y^3(-2x^2-3y+5xy)$.

Bài tập 2.

a. $18x^2y-12x^3=6x^2(3y-2x)$.

b. $3xy^2+6xyz=3xy(y+2z)$.

c. $x^{m+2}-x^m=x^m(x^2-1)$.

d. $5x^{m+2}+10x^2=5x^2(x^m+2)$.

Bài tập 3.

a. $5x(x-1)-3y(x-1)=(x-1)(5x-3y)$.

b. $3x(x+5)-2(5+x)=(x+5)(3x-2)$.

c. $2a(x+y)-3b(x+y)=(x+y)(2a-3b)$.

d. $2a(x-1)+b(x-1)-(x-1)=(x-1)(2a+b-1)$.

Bài tập 4.

a. Ta được:

$$3x^3(2y - 3z) - 15x(2y - 3z)^2 = 3x(2y - 3z)[x^2 - 5(2y - 3z)].$$

b. Ta được:

$$9x^2(y + z) + 3(y + z)^2 = 3(y + z)[3x^2 + (y + z)].$$

c. Ta được:

$$(x + 1)^2 - 3(x + 1) = (x + 1)(x + 1 - 3) = (x + 1)(x - 2).$$

d. Ta được:

$$2x(x - 2) - (x - 2)^2 = (x - 2)[2x - (x - 2)] = (x - 2)(x + 2).$$

Bài tập 5.

a. Ta được:

$$3x(x + 2) + 5(-x - 2) = 3x(x + 2) - 5(x + 2) = (x + 2)(3x - 5).$$

b. Ta được:

$$7x(x - y) - (y - x) = 7x(x - y) + (x - y) = (x - y)(7x + 1).$$

c. Ta được:

$$5x(x - 1) - (1 - x) = 5x(x - 1) + (x - 1) = (x - 1)(5x + 1).$$

d. Ta được:

$$4x(x - y) + 3(y - x)^2 = 4x(x - y) + 3(x - y)^2 = (x - y)[4x + 3(x - y)]$$
$$= (x - y)(7x - 3y).$$

e. Ta được:

$$x(x - 1) + (1 - x)^2 = x(x - 1) + (x - 1)^2 = (x - 1)[x + (x - 1)]$$
$$= (x - 1)(2x - 1).$$

f. Ta được:

$$3x(x - 1)^2 - (1 - x)^3 = 3x(x - 1)^2 + (x - 1)^3 = (x - 1)^2[3x + (x - 1)]$$
$$= (x - 1)^2(4x - 1).$$

Bài tập 6. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 7. Viết lại biểu thức dưới dạng:

$$P = x(2y - z) - y(2y - z) = (2y - z)(x - y)$$

khi đó, tại $x = 116$, $y = 16$ và $z = 2$ ta được:

$$P = (32 - 2)(116 - 16) = 30.100 = 3000.$$

Bài tập 8.

a. Ta biến đổi:

$$x^3 = x^5 \Leftrightarrow x^5 - x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 0 \text{ hoặc } x^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = \pm 1.$$

Vậy, $x = 0$ hoặc $x = \pm 1$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. Ta biến đổi:

$$4x(x + 1) = 8(x + 1) \Leftrightarrow 4x(x + 1) - 8(x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(x + 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \text{ hoặc } x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1, x = 2.$$

Vậy, $x = -1$ hoặc $x = 2$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 9.

a. $x = 1, x = -2$.

b. $x = \pm 2$.

c. $x = 3, x = 4$.

d. $x = 2, x = \frac{1}{5}$.

Bài toán 2 PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ BẰNG PHƯƠNG PHÁP DÙNG HẰNG ĐẲNG THỨC

I. PHƯƠNG PHÁP

Việc sử dụng hằng đẳng thức để phân tích đa thức thành nhân tử thường đi theo hai hướng:

__Hướng 1__: Biến đổi đa thức ban đầu về dạng quen thuộc của hằng đẳng thức, thí dụ:

$$4a^2 - 9 = (2a)^2 - 3^2 = (2a - 3)(2a + 3).$$

$$1 - 125x^6y^3 = 1^3 - (5x^2y)^3$$
$$= (1 - 5x^2y)[1^2 + 1.(5x^2y) + (5x^2y)^2]$$
$$= (1 - 5x^2y)(1 + 5x^2y + 25x^4y^2).$$

$$4x^2 + 4x + 1 = (2x)^2 + 2.2x.1 + 1^2 = (2x + 1)^2.$$

$$8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = (2x)^3 - 3.(2x)^2.1 + 3.2x.1^2 - 1^3$$
$$= (2x - 1)^3.$$

__Hướng 2__: Sử dụng hằng đẳng thức để làm xuất hiện nhân tử chung hoặc xuất hiện hằng đẳng thức mới, thí dụ:

$$4x(a^2 - b^2) + 8(a + b) = 4x(a - b)(a + b) + 8(a + b)$$
$$= 4(a + b)[x(a - b) + 2]$$
$$= 4(a + b)(ax - bx + 2).$$

$$x^2 - 2x + 1 - y^2 + 2y - 1 = (x^2 - 2x + 1) - (y^2 - 2y + 1)$$
$$= (x - 1)^2 - (y - 1)^2$$
$$= [(x-1) - (y-1)][(x-1) + (y - 1)]$$
$$= (x - y)(x + y - 2).$$

Cách làm như vậy được gọi là *phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp dùng hằng đẳng thức*.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

__Ví dụ 1:__ Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a. $4x^2 - 3y^2$.

b. $1 - x^4y^4z^8$.

Giải

a. Ta có:

$$4x^2 - 3y^2 = (2x)^2 - (\sqrt{3}\,y)^2 = (2x - \sqrt{3}\,y)(2x + \sqrt{3}\,y).$$

b. Ta có:

$$1 - x^4y^4z^8 = 1^2 - (x^2y^2z^4)^2 = (1 - x^2y^2z^4)(1 + x^2y^2z^4)$$
$$= [1^2 - (xyz^2)^2](1 + x^2y^2z^4)$$
$$= (1 - xyz^2)(1 + xyz^2)(1 + x^2y^2z^4).$$

Ví dụ 2: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

$$(x^2 + 1)^2 - 4x^2.$$

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1: Ta có:

$$(x^2 + 1)^2 - 4x^2 = (x^2 + 1)^2 - (2x)^2 = (x^2 + 1 + 2x)(x^2 + 1 - 2x)$$
$$= (x + 1)^2 (x - 1)^2.$$

Cách 2: Ta có:

$$(x^2 + 1)^2 - 4x^2 = (x^4 + 2x^2 + 1) - 4x^2 = x^4 - 2x^2 + 1$$
$$= (x^2 - 1)^2 = (x + 1)^2 (x - 1)^2.$$

Ví dụ 3: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a. $27 + 8x^3$.   b. $y^6 - 64x^6$.

Giải

a. Ta có:

$$27 + 8x^3 = 3^3 + (2x)^3 = (3 + 2x)[3^2 - 3.2x + (2x)^2] = (3 + 2x)(9 - 6x + 4x^2).$$

b. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Ta có:

$$y^6 - 64x^6 = (y^2)^3 - (4x^2)^3 = (y^2 - 4x^2)[(y^2)^2 + y^2.4x^2 + (4x^2)^2]$$
$$= [y^2 - (2x)^2](y^4 + 4x^2y^2 + 16x^4)$$
$$= (y - 2x)(y + 2x)(y^4 + 4x^2y^2 + 16x^4).$$

Cách 2: Ta có:

$$y^6 - 64x^6 = (y^3)^2 - (8x^3)^2 = (y^3 - 8x^3)(y^3 + 8x^3)$$
$$= (y^3 - 8x^3)(y^3 + 8x^3)$$
$$= [y^3 - (2x)^3][y^3 + (2x)^3]$$
$$= (y - 2x)(y^2 + 2xy + 4x^2)(y + 2x)(y^2 - 2xy + 4x^2).$$

Nhận xét: Như vậy, thông qua ví dụ trên phần b), chúng ta thấy ngay được việc lựa chọn hướng biến đổi theo hằng đẳng thức một cách thích hợp sẽ nhận được kết quả tốt hơn.

Ví dụ 4: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a. $4x^2 - 4x + 1 - y^2 - 8y - 16$.   b. $(x^2 + 4x + 4)^3 - y^6$.

Giải

a. Ta có:

$$4x^2 - 4x + 1 - y^2 - 8y - 16 = [(2x)^2 - 2.2x + 1^2] - (y^2 + 2.y.4 + 4^2)$$

$= (2x - 1)^2 - (y + 4)^2 = [(2x-1) - (y + 4)][(2x - 1) + (y + 4)]$

$= (2x - y - 5)(2x + y + 3).$

Chú ý: Ta thấy ngay đa thức trên có thể được cho dưới dạng thu gọn:

$4x^2 - 4x - y^2 - 8y - 15$

khi đó chúng ta cần sử dụng phép tách hệ số $-15 = 1 - 16$, đó chính là ý tưởng của phương pháp trong bài toán 4.

b. Ta có:

$$(x^2 + 4x + 4)^3 - y^6 = (x^2 + 2.x.2 + 2^2)^3 - y^6 = [(x + 2)^2]^3 - y^6$$
$$= (x + 2)^6 - y^6 = [(x + 2)^3]^2 - (y^3)^2$$
$$= [(x + 2)^3 - y^3][(x + 2)^3 + y^3]$$
$$= [(x + 2) - y][(x + 2)^2 + (x + 2)y + y^2]$$
$$[(x + 2) + y][(x + 2)^2 - (x + 2)y + y^2]$$
$$= (x - y + 2)[(x + 2)^2 + (x + 2)y + y^2]$$
$$(x + y + 2][(x + 2)^2 - (x + 2)y + y^2].$$

Ví dụ 5: Chứng minh rằng:

$[(2n + 5)^2 - 25] \vdots 8$ với n là số tự nhiên bất kỳ.

Giải

Ta có:

$$(2n + 5)^2 - 25 = (2n + 5)^2 - 5^2 = (2n + 5 - 5)(2n + 5 + 5)$$
$$= 2n(2n + 10) = 4n(n + 5).$$

Khi đó vì trong hai số n và n + 5 luôn có một số chẵn do đó một trong hai số sẽ chia hết cho 2.

Vậy $(2n + 5)^2 - 25 \vdots 8$.

Ví dụ 6: Chứng minh rằng:

$(n^4 - 1) \vdots 8$ với n là số tự nhiên lẻ bất kỳ.

Giải

Ta có:

$$n^4 - 1 = (n^2)^2 - 1 = (n^2 - 1)(n^2 + 1) = (n - 1)(n + 1)(n^2 + 1).$$

Khi đó vì n là số tự nhiên lẻ nên $(n - 1)$ và $(n + 1)$ là hai số tự nhiên chẵn liên tiếp. Trong hai số tự nhiên chẵn liên tiếp bao giờ cũng có một số chia hết cho 4 và số còn lại chia hết cho 2.

Vậy $(n - 1)(n + 1) \vdots 8$, suy ra $(n^4 - 1) \vdots 8$.

Chú ý: Với số tự nhiên n, ta có:

- n, n + 1 được gọi là hai số tự nhiên liên tiếp.
- 2n, 2n + 2 được gọi là hai số tự nhiên chẵn liên tiếp.
- 2n - 1, 2n + 1 được gọi là hai số tự nhiên lẻ liên tiếp.

Ví dụ 7: Chứng minh rằng hiệu các bình phương của hai số lẻ liên tiếp thì chia hết cho 8

Giải

Gọi hai số lẻ liên tiếp là $2n - 1$ và $2n + 1$ (n là số nguyên).

Hiệu các bình phương của chúng là

$$(2n + 1)^2 - (2n - 1)^2 = (2n + 1 + 2n - 1)(2n + 1 - 2n + 1)$$
$$= 4n.\ 2 = 8n, \text{ chia hết cho } 8.$$

Chú ý: Ta còn chứng minh được bài toán tổng quát hơn:

" *Hiệu các bình phương của hai số lẻ bất kì thì chia hết cho 8.*"

Thật vậy, gọi hai số lẻ bất kì là $2a + 1$ và $2b + 1$ (a và b là số nguyên). Ta có:

$$(2a + 1)^2 - (2b + 1)^2 = 4a^2 + 4a + 1 - 4b^2 - 4b - 1$$
$$= 4a^2 + 4a - 4b^2 - 4b$$
$$= 4a(a + 1) - 4b(b + 1)$$

Do $a(a + 1)$, $b(b + 1)$ là tích hai số nguyên liên tiếp, chúng chia hết cho 2. Do đó $4a(a + 1)$ và $4b(b + 1)$ đều chia hết cho 8.

Vậy $(2a + 1)^2 - (2b + 1)^2$ chia hết cho 8.

Ví dụ 8: Tìm x, biết:

a. $x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = 0.$

b. $x^3 + 3\sqrt{3}\,x^2 + 9x + 3\sqrt{3} = 0.$

Giải

a. Ta có:

$$x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = x^2 - 2.\frac{1}{4}x + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{4}\right)^2,$$

từ đó ta được:

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = 0, \text{ suy ra } x = \frac{1}{4}.$$

b. Ta có:

$$x^3 + 3\sqrt{3}\,x^2 + 9x + 3\sqrt{3} = x^3 + 3.x^2.\sqrt{3} + 3.x.(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^3$$
$$= (x + \sqrt{3})^3,$$

từ đó ta được:

$$(x + \sqrt{3})^3 = 0, \text{ suy ra } x = -\sqrt{3}.$$

Ví dụ 9: Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$$

Giải

Sử dụng hằng đẳng thức $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$

ta có:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y)^3 - 3xy(x + y) + z^3 - 3xyz$$
$$= [(x + y)^3 + z^3] - [3xy(x + y) + 3xyz]$$
$$= (x+y+z)[(x + y)^2 + (x + y)z + z^2] - 3xy(x + y + z)$$
$$= (x+y+z)[(x + y)^2 + (x + y)z + z^2 - 3xy]$$
$$= (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx).$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a. $4x^2 - 1$.

b. $25x^2 - 0,09$.

c. $9x^4 - \frac{1}{4}$.

d. $(x - y)^2 - 4$.

e. $9 - (x - y)^2$.

f. $(x^2 + 4)^2 - 16x^2$.

Bài tập 2. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a. $x^4 - y^4$.

b. $x^2 - 3y^2$.

c. $x^4 - x^4y^4z^8$.

d. $(3x - 2y)^2 - (2x - 3y)^2$.

e. $9(x - y)^2 - 4(x + y)^2$.

f. $(4x^2 - 4x + 1) - (x + 1)^2$.

Bài tập 3. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a. $x^3 + 27$.

b. $8 + 3\sqrt{3}\,x^3$.

c. $x^6 - 64y^{12}$.

d. $27x^3 - 0,001$.

e. $x^6 - y^3$.

f. $125x^3 - 1$.

Bài tập 4. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a. $x^4 + 2x^2 + 1$.

b. $x^4 - 2x^2 + 1$.

c. $x^4 + 4 - 4x^2$.

d. $10x - x^2 - 25$.

e. $4x^2 - 12xy + 9y^2$.

f. $-x^2 - 2xy - y^2$.

g. $(x + y)^2 - 2(x + y) + 1$.

Bài tập 5. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a. $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

b. $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$.

Bài tập 6. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a. $x^3 + 1 - x^2 - x$.

b. $x^4 - 1 - 3(x^2 + 1)$.

c. $x^2 + y^2 - 2xy - 4z^2$.

d. $x^2 - 4x + 4 - y^2 - 6y - 9$.

e. $(x^2 - 2x + 1)^3 - y^6$.

f. $(x + y)^3 - x^3 - y^3$.

Bài tập 7. Chứng minh rằng:

a. $(n^2 - 1) \vdots 8$ với n là số tự nhiên lẻ bất kỳ.

b. $(n^6 - 1) \vdots 8$ với n là số tự nhiên lẻ bất kỳ.

c. $[(5n + 2)^2 - 4] \vdots 5$ với n là số tự nhiên bất kỳ.

Bài tập 8. Chứng minh rằng hiệu các bình phương của hai số tự nhiên lẻ liên tiếp chia hết cho 8.

Bài tập 9. Tìm x, biết:

a. $4x^2 - 49 = 0$.

b. $x^2 + 36 = 12x$.

c. $\frac{1}{16}x^2 - x + 4 = 0$.

d. $x^3 - 3\sqrt{3}\,x^2 + 9x - 3\sqrt{3} = 0$.

IV. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. $4x^2 - 1 = (2x)^2 - 1^2 = (2x - 1)(2x + 1)$.

b. $25x^2 - 0{,}09 = (5x)^2 - (0{,}3)^2 = (5x - 0{,}3)(5x + 0{,}3)$.

c. Ta được:

$$9x^4 - \frac{1}{4} = (3x^2)^2 - (\frac{1}{2})^2 = (3x^2 - \frac{1}{2})(3x^2 + \frac{1}{2})$$

$$= (\sqrt{3}x - \frac{1}{\sqrt{2}})(\sqrt{3}x + \frac{1}{\sqrt{2}})(3x^2 + \frac{1}{2})$$

d. $(x - y)^2 - 4 = (x - y - 2)(x - y + 2)$.

e. $9 - (x - y)^2 = (3 - x + y)(3 + x - y)$.

f. $(x^2 + 4)^2 - 16x^2 = (x^2 + 4 - 4x)(x^2 + 4 + 4x) = (x - 2)^2(x + 2)^2$.

Bài tập 2.

a. $x^4 - y^4 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)$.

b. $x^2 - 3y^2 = (x - \sqrt{3}y)(x + \sqrt{3}y)$.

c. Ta được:

$$x^4 - x^4y^4z^8 = x^4(1 - y^4z^8) = x^4(1 - y^2z^4)(1 + y^2z^4)$$

$$= x^4(1 - yz^2)(1 + yz^2)(1 + y^2z^4).$$

d. Ta được:

$$(3x - 2y)^2 - (2x - 3y)^2 = [(3x - 2y) - (2x - 3y)][(3x - 2y) + (2x - 3y)]$$

$$= (x + y)(5x - 5y) = 5(x + y)(x - y).$$

e. Ta được:

$$9(x - y)^2 - 4(x + y)^2 = [3(x - y) - 2(x + y)][3(x - y) + 2(x + y)]$$

$$= (x - 5y)(5x - y).$$

f. Ta được:

$$(4x^2 - 4x + 1) - (x + 1)^2 = (2x - 1)^2 - (x + 1)^2$$

$$= [(2x - 1) - (x + 1)][(2x - 1) + (x + 1)] = 3x(x - 2).$$

Bài tập 3.

a. $x^3 + 27 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9)$.

b. $8 + 3\sqrt{3}x^3 = 2^3 + (\sqrt{3}x)^3 = (2 + \sqrt{3}x)(4 - 2\sqrt{3}x + 3x^2)$.

c. Ta được:

$$x^6 - 64y^{12} = (x^3 - 8y^6)(x^3 + 8y^6)$$

$$= (x - 2y^2)(x^2 + 2xy^2 + 4y^4)(x + 2y^2)(x^2 - 2xy^2 + 4y^4).$$

d. $27x^3 - 0{,}001 = (3x - 0{,}1)(9x^2 + 0{,}3x + 0{,}01)$.

e. $x^6 - y^3 = (x^2 - y)(x^4 + x^2y + y^2)$.

f. $125x^3 - 1 = (5x - 1)(25x^2 + 5x + 1)$.

Bài tập 4.

a. $x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2$.

b. $x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 = (x - 1)^2(x + 1)^2$.

c. $x^4 + 4 - 4x^2 = (x^2 - 2)^2 = (x - \sqrt{2})^2.(x + \sqrt{2})^2$.

d. $10x - x^2 - 25 = -(x^2 - 10x + 25) = -(x - 5)^2$.

e. $4x^2 - 12xy + 9y^2 = (2x - 3y)^2$.

f. $-x^2 - 2xy - y^2 = -(x^2 + 2xy + y^2) = -(x + y)^2$.

g. $(x + y)^2 - 2(x + y) + 1 = (x + y - 1)^2$.

Bài tập 5.

a. $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3$. b. $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = (x + 2)^3$.

Bài tập 6.

a. Ta được:

$$x^3 + 1 - x^2 - x = (x^3 - x) + (1 - x^2) = x(x^2 - 1) - (x^2 - 1)$$
$$= (x^2 - 1)(x - 1) = (x - 1)(x + 1)(x - 1) = (x - 1)^2(x - 1).$$

b. Ta được:

$$x^4 - 1 - 3(x^2 + 1) = (x^2 - 1)(x^2 + 1) - 3(x^2 + 1) = (x^2 + 1)(x^2 - 1 - 3)$$
$$= (x^2 + 1)(x^2 - 4) = (x^2 + 1)(x - 2)(x + 2).$$

c. $x^2 + y^2 - 2xy - 4z^2 = (x - y)^2 - 4z^2 = (x - y - 2z)(x - y + 2z)$.

d. Ta được:

$$x^2 - 4x + 4 - y^2 - 6y - 9 = (x^2 - 4x + 4) - (y^2 + 6y + 9)$$
$$= (x - 2)^2 - (y + 3)^2 = [(x - 2) - (y + 3)][(x - 2) + (y + 3)].$$
$$= (x - y - 5)(x + y + 1).$$

e. Ta được:

$$(x^2 - 2x + 1)^3 - y^6 = (x - 1)^6 - y^6 = [(x - 1)^3 - y^3][(x - 1)^3 + y^3]$$
$$= (x - 1 - y)[(x - 1)^2 + (x - 1)y + y^2](x - 1 + y)[(x - 1)^2 - (x - 1)y + y^2]$$

f. Ta có thể lựa chọn theo hai cách sau:

Cách 1: Ta được:

$$(x + y)^3 - x^3 - y^3 = (x + y)^3 - (x^3 + y^3) = (x + y)^3 - (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$
$$= (x + y)[(x + y)^2 - (x^2 - xy + y^2)] = 3xy(x + y)$$

Cách 2: Ta được:

$$(x + y)^3 - x^3 - y^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - x^3 - y^3$$
$$= 3x^2y + 3xy^2 = 3xy(x + y).$$

Bài tập 7.

a. Với n là số tự nhiên lẻ bất kỳ, ta có $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$. Khi đó:

$$n^2 - 1 = (2k + 1)^2 - 1 = (2k + 1 - 1)(2k + 1 + 1)$$
$$= 2k(2k + 2) = 4k(k + 1).$$

Vì k, k + 1 là hai số tự nhiên liên tiếp do đó sẽ có một số chẵn.

Suy ra $4k(k + 1) \vdots 8$.

Vậy, $(n^2 - 1) \vdots 8$ với n là số tự nhiên lẻ bất kỳ.

b. Ta có:

$$n^6 - 1 = (n^2 - 1)(n^4 + n^2 + 1).$$

Theo kết quả câu a) ta có $(n^2 - 1) \vdots 8$

Do đó $(n^6 - 1) \vdots 8$ với n là số tự nhiên lẻ bất kỳ.

c. Ta có:

$$(5n + 2)^2 - 4 = [(5n + 2) - 2][(5n + 2) + 2] = 5n(5n + 4).$$

Vậy, $[(5n + 2)^2 - 4] \vdots 5$ với n là số tự nhiên bất kỳ.

Bài tập 8. Hai số tự nhiên lẻ liên tiếp có dạng $2n - 1$ và $2n + 1$ với $n \in N^*$.

Khi đó, hiệu các bình phương của hai số là:

$$(2n + 1)^2 - (2n - 1)^2 = [(2n + 1) - (2n - 1)][(2n + 1) + (2n - 1)]$$
$$= 2.4n = 8n \vdots 8.$$

Vậy, hiệu các bình phương của hai số tự nhiên lẻ liên tiếp chia hết cho 8.

Bài tập 9.

a. Ta biến đổi:

$$4x^2 - 49 = 0 \Leftrightarrow (2x - 7)(2x + 7) = 0 \Leftrightarrow 2x - 7 = 0 \text{ hoặc } 2x + 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7}{2} \text{ hoặc } x = \frac{7}{2}$$

Vậy, $x = \pm\frac{7}{2}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. $x = 6$.

c. Ta biến đổi:

$$\frac{1}{16}x^2 - x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}x - 2\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 8.$$

Vậy, $x = 8$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

d. Ta biến đổi:

$$x^3 - 3\sqrt{3}x^2 + 9x - 3\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{3})^3 = 0 \Leftrightarrow x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}.$$

Vậy, $x = \sqrt{3}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài toán 3 PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ BẰNG PHƯƠNG PHÁP NHÓM HẠNG TỬ

I. PHƯƠNG PHÁP

Giả sử cần phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$$xy + 3x + 2y + 6$$

với hai phương pháp đã biết trong hai bài toán 1 và bài toán 2, chúng ta sẽ bắt đầu đặt câu hỏi:

1. Các hạng tử trong đa thức trên có nhân tử chung hay không ? - Câu trả lời thật đơn giản là *không*, điều đó có nghĩa là không thể sử dụng ngay phương pháp trong bài toán 1.
2. Các hạng tử trong đa thức trên có tạo ra những hằng đẳng thức hay không ? - Câu trả lời thật đơn giản là *không*, điều đó có nghĩa là không thể sử dụng ngay phương pháp trong bài toán 2.

Chúng ta đều đã biết, để phân tích đa thức thành nhân tử công việc quan nhất là tạo ra được nhân tử chung. Vậy ở đa thức trên làm thế nào để xuất hiện nhân tử chung, câu trả lời được rút ra từ ý tưởng tổng quát như sau:

" Cho đa thức:

$$A + B + C + D.$$

Nếu A, B, C, D không có nhân tử chung thì hãy thử với:

$$(A + B) \text{ và } (C + D)$$

hoặc các phép giao hoán khác. Tức là nhóm các hạng tử có nhân tử chung lại với nhau hoặc tạo thành một hằng đẳng thức để làm xuất hiện nhân tử chung của đa thức ".

Từ đó ta có:

$$xy + 3x + 2y + 6 = (xy + 3x) + (2y + 6) = x(y + 3) + 2(y + 3)$$
$$= (y + 3)(x + 2).$$

Cách làm như vậy được gọi là *phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp nhóm hạng tử.*

Và từ ý tưởng tổng quát trên chúng ta thấy ngay rằng đối với một đa thức có thể có nhiều cách nhóm những hạng tử thích hợp, cụ thể:

$$xy + 3x + 2y + 6 = (xy + 2y) + (3x + 6) = y(x + 2) + 3(x + 2)$$
$$= (x + 2)(y + 3).$$

Tuy nhiên, không thể nhóm hai hạng tử bất kì lại với nhau mà phải nhóm hai hạng tử nào đó có nhân tử chung và khi phân tích mỗi nhóm thành nhân tử, mỗi nhóm lại có nhân tử chung.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$$3xy - z - 3x + yz.$$

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Ta có:

$$3xy - z - 3x + yz = (3xy - 3x) + (yz - z) = 3x(y - 1) + z(y - 1)$$
$$= (y - 1)(3x + z).$$

Cách 2: Ta có:

$$3xy - z - 3x + yz = (3xy + yz) - (z + 3x) = y(3x + z) - (z + 3x)$$
$$= (3x + z)(y - 1).$$

Ví dụ 2: Tìm x, biết:

$$x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x = 0.$$

Giải

Trước tiên ta đi phân tích đa thức thành nhân tử, có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Ta có:

$$x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x = (x^4 - 2x^3) + (x^2 - 2x) = x^3(x - 2) + x(x - 2)$$
$$= (x - 2)(x^3 + x) = x(x - 2)(x^2 + 1).$$

Cách 2: Ta có:

$$x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x = (x^4 + x^2) - (2x^3 + 2x)$$
$$= x^2(x^2 + 1) - 2x(x^2 + 1) = (x^2 + 1)(x^2 - 2x)$$
$$= x(x^2 + 1)(x - 2).$$

Từ đó, ta được:

$x(x^2 + 1)(x - 2) = 0$, suy ra $x = 0$ hoặc $x = 2$.

Ví dụ 3: Chứng minh rằng:

$$(n^4 - 4n^3 - 4n^2 + 16n) \vdots 384$$

với n là số tự nhiên chẵn lớn hơn 4.

Giải

Ta có:

$$n^4 - 4n^3 - 4n^2 + 16n = (n^4 - 4n^3) - (4n^2 - 16n)$$
$$= n^3(n - 4) - 4n(n - 4) = n(n - 4)(n^2 - 4)$$
$$= n(n - 4)(n - 2)(n + 2).$$

Khi đó vì n là số tự nhiên chẵn lơn hơn 4 nên có thể đặt:

$$n = 2k + 2, k \geq 1$$

suy ra:

$$n^4 - 4n^3 - 4n^2 + 16n = (2k + 2)(2k + 2 - 4)(2k + 2 - 2)(2k + 2 + 2)$$
$$= 16(k - 1)k(k + 1)(k + 2)$$

Ta có $(k - 1)$, k, $k + 1$ và $(n + 2)$ là bốn số tự nhiên liên tiếp, do đó tích của chúng chia hết cho 2.3.4.

Vậy:

$$16(k - 1)k(k + 1)(k + 2) \vdots 16.2.3.4,$$

suy ra:

$$(n^4 - 4n^3 - 4n^2 + 16n) \vdots 384.$$

Nhận xét: Cũng có thể nhóm theo cách:

$$n^4 - 4n^3 - 4n^2 + 16n = (n^4 - 4n^2) - (4n^3 - 16n)$$
$$= n^2(n^2 - 4) - 4n(n^2 - n) = (n^2 - 4)(n^2 - 4n)$$
$$= n(n - 2)(n + 2)(n - 4).$$

Ví dụ 4: Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$$xyz + xy + yz + zx + x + y + z + 1.$$

Giải

Ta có thể lựa chọn các cách sau:

Cách 1: Ta có:

$$xyz+xy+yz+zx+x+y+z+1 = (xyz + xy) + (yz + y) + (zx + x) + (z + 1)$$
$$= xy(z + 1) + y(z + 1) + x(z + 1) + (z + 1)$$
$$= (z + 1)(xy + y + x + 1)$$
$$= (z + 1)[(xy + y) + (x + 1)]$$
$$= (z + 1)[y(x + 1) + (x + 1)]$$
$$= (z + 1)(x + 1)(y + 1).$$

Cách 2: Ta có:

$$xyz+xy+yz+zx+x+y+z+1 = (xyz + xy + zx + x) + (yz + y + z + 1)$$
$$= x(yz + y + z + 1) + (yz + y + z + 1)$$
$$= (yz + y + z + 1)(x + 1)$$
$$= [(yz + y) + (z + 1)](x + 1)$$
$$= [y(z + 1) + (z + 1)](x + 1)$$
$$= (z + 1)(y + 1)](x + 1).$$

Nhận xét: Ta có:

- Trong cách giải 1, bằng việc nhón hai hạng tử để làm xuất hiện nhân tử chung $z + 1$, từ đó các em học sinh có thể thấy ngay rằng còn có hai cách giải khác với mục đích làm xuất hiện nhân tử chung $x + 1$ hoặc $y + 1$.
- Trong cách giải 2, bằng việc nhón bốn hạng tử có nhân tử chung là x để làm xuất hiện nhân tử chung $yz + y + z + 1$, từ đó các em học sinh có thể thấy ngay rằng còn có hai cách giải khác bằng cách nhón bốn hạng tử có nhân tử chung là y hoặc z.

Ví dụ 5: Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$$x^2 - 4y^2 + 2x + 4y.$$

Giải

Ta có:

$$x^2 - 4y^2 + 2x + 4y = (x^2 - 4y^2) + (2x + 4y)$$
$$= (x - 2y)(x + 2y) + 2(x + 2y)$$
$$= (x + 2y)(x - 2y + 2).$$

Ví dụ 6: Tính giá trị của biểu thức:

$$P = y^2 + xy + x + 2y + 1 \text{ với } x = 100 \text{ và } y = 99.$$

Giải

Ta có:

$$y^2 + xy + x + 2y + 1 = (xy + x) + (y^2 + 2y + 1) = x(y + 1) + (y + 1)^2$$
$$= (y + 1)(x + y + 1).$$

Suy ra:

$$P = (99 + 1)(100 + 99 + 1) = 100.200 = 20000.$$

Ví dụ 7: Tìm x biết:

$$x^2(x + 1) + x(x + 2) - 4(x + 1) = 0.$$

Giải

Ta có:

$$x^2(x + 1) + x(x + 2) - 4(x + 1) = [x^2(x + 1) - 4(x + 1)] + x(x + 2)$$
$$= (x + 1)(x^2 - 4) + x(x + 2) = (x + 1)(x - 2)(x + 2) + x(x + 2)$$
$$= (x + 2)[(x + 1)(x - 2) + x] = (x + 2)(x^2 - 2)$$
$$= (x + 2)[x^2 - (\sqrt{2})^2] = (x + 2)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}).$$

Từ đó, ta được:

$$(x + 2)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0,$$

suy ra $x = -2$ hoặc $x = \pm\sqrt{2}$.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a. $xy + y - 2x - 2$.

b. $x^3 + x^2 + x + 1$.

c. $x^3 - 3x^2 + 3x - 9$.

d. $xy + xz + y^2 + yz$.

e. $xy + 1 + x + y$.

Bài tập 2. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a. $ax - ay + bx - by$.

b. $ax - bx + ab - x^2$.

c. $ax + ay - 4x - 4y$.

d. $x^2 + ab + ax + bx$.

Bài tập 3. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a. $ax + a - bx - b + cx + c$.

b. $ax^2 - ax + bx^2 - bx + a + b$.

c. $ab(x^2 + y^2) + xy(a^2 + b^2)$.

d. $ab(x^2 + 1) + x(a^2 + b^2)$.

Bài tập 4. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a. $x^2 - 2xy + y^2 - 4$.

b. $x^2 - y^2 + 4x + 4$.

c. $x^2 - 2xy + y^2 - 1$.

d. $9 - x^2 - 2xy - y^2$.

e. $25 - x^2 + 4xy - 4y^2$.

Bài tập 5. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a. $x^2 + xy + xz - x - y - z$.

b. $x^2 - 2xy + 3xz + x - 2y + 3z$.

Bài tập 6. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a. $xyz - xy - yz - zx + x + y + z - 1$.

b. $xyz + 3xy + 2xz + 6x + yz + 3y + 2z + 6$.

Bài tập 7. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a. $4x^2 - 9y^2 - 4x - 6y$.

b. $x^3 - y^3 + 2x^2 - 2y^2$.

c. $x^2 + y^2 + 2xy + yz + zx$.

d. $x^3 + y^3 + x^2y + y^2x + z^2x + z^2y$.

Bài tập 8. Tìm x, biết:

a. $x^4 - 4x^3 + x^2 - 4x = 0$.

b. $x^2(x - 1) - 2x(x - 3) - 9(x - 1) = 0$.

Bài tập 9. Tính giá trị của biểu thức:

$$A = 13{,}5.5{,}8 - 8{,}3.4{,}2 - 5{,}8.8{,}3 + 4{,}2.13{,}5.$$

Bài tập 10. Tính giá trị của các biểu thức:

a. $P = xy + xz + 2x - y - z - 2$ với $x = 101$, $y = 100$ và $z = 98$.

b. $Q = xyz - 3xy - 2xz + 6x - yz + 3y + 2z - 6$ với $x = 101$, $y = 202$ và $z = 303$.

IV. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. Ta biến đổi:

$$xy + y - 2x - 2 = (xy + y) - (2x + 2) = y(x + 1) - 2(x + 1) = (x + 1)(y - 2).$$

b. Ta biến đổi:

$$x^3 + x^2 + x + 1 = (x^3 + x^2) + (x + 1) = x^2(x + 1) + (x + 1)$$
$$= (x + 1)(x^2 + 1).$$

c. Ta biến đổi:

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 9 = (x^3 - 3x^2) + (3x - 9) = x^2(x - 3) + 3(x - 3)$$
$$= (x - 3)(x^2 + 3).$$

d. Ta biến đổi:

$$xy + xz + y^2 + yz = (xy + xz) + (y^2 + yz) = x(y + z) + y(y + z)$$
$$= (y + z)(x + y).$$

e. Ta biến đổi:

$$xy + 1 + x + y = (xy + x) + (y + 1) = x(y + 1) + (y + 1) = (y + 1)(x + 1).$$

Bài tập 2.

a. Ta biến đổi:

$$ax - ay + bx - by = (ax - ay) + (bx - by) = a(x - y) + b(x - y)$$
$$= (x - y)(a + b).$$

b. Ta biến đổi:

$$ax - bx + ab - x^2 = (ax - x^2) + (ab - bx) = x(a - x) + b(a - x)$$
$$= (a - x)(x + b).$$

c. Ta biến đổi:

$$ax + ay - 4x - 4y = (ax + ay) - (4x + 4y) = a(x + y) - 4(x + y)$$
$$= (x + y)(a - 4).$$

d. Ta biến đổi:

$$x^2 + ab + ax + bx = (x^2 + bx) + (ax + ab) = x(x + b) + a(x + b)$$
$$= (x + b)(x + a).$$

Bài tập 3.

a. Ta biến đổi:

$$ax + a - bx - b + cx + c = (ax + a) - (bx + b) + (cx + c)$$
$$= a(x + 1) - b(x + 1) + c(x + 1) = (x + 1)(a - b + c).$$

b. Ta biến đổi:

$$ax^2 - ax + bx^2 - bx + a + b = (ax^2 - ax + a) + (bx^2 - bx + b)$$
$$= a(x^2 - x + 1) + b(x^2 - x + 1) = (x^2 - x + 1)(a + b).$$

c. Ta biến đổi:

$$ab(x^2 + y^2) + xy(a^2 + b^2) = abx^2 + aby^2 + xya^2 + xyb^2$$
$$= (abx^2 + xyb^2) + (xya^2 + aby^2) = bx(ax + by) + ay(ax + by)$$
$$= (ax + by)(bx + ay).$$

d. Ta biến đổi:

$$ab(x^2 + 1) + x(a^2 + b^2) = abx^2 + ab + xa^2 + xb^2$$
$$= (abx^2 + xb^2) + (ab + xa^2)$$
$$= bx(ax + b) + a(b + xa) = (ax + b)(bx + a).$$

Bài tập 4.

a. Ta biến đổi:

$$x^2 - 2xy + y^2 - 4 = (x^2 - 2xy + y^2) - 4 = (x - y)^2 - 4 = (x - y - 2)(x - y + 2).$$

b. Ta biến đổi:

$$x^2 - y^2 + 4x + 4 = (x^2 + 4x + 4) - y^2 = (x + 2)^2 - y^2 = (x + 2 - y)(x + 2 + y).$$

c. Ta biến đổi:

$$x^2 - 2xy + y^2 - 1 = (x^2 - 2xy + y^2) - 1 = (x - y)^2 - 1 = (x - y - 1)(x - y + 1).$$

d. Ta biến đổi:

$$9 - x^2 - 2xy - y^2 = 9 - (x^2 + 2xy + y^2) = 9 - (x + y)^2$$
$$= (3 - x - y)(3 + x + y).$$

e. Ta biến đổi:

$$25 - x^2 + 4xy - 4y^2 = 25 - (x^2 - 4xy + 4y^2) = 25 - (x - 2y)^2$$
$$= (5 - x + 2y)(5 + x - 2y).$$

Bài tập 5.

a. Ta biến đổi:

$$x^2 + xy + xz - x - y - z = (x^2 + xy + xz) - (x + y + z)$$
$$= x(x + y + z) - (x + y + z) = (x + y + z)(x - 1).$$

b. Ta biến đổi:

$$x^2 - 2xy + 3xz + x - 2y + 3z = (x^2 - 2xy + 3xz) + (x - 2y + 3z)$$
$$= x(x - 2y + 3z) + (x - 2y + 3z) = (x - 2y + 3z)(x + 1).$$

Bài tập 6.

a. Ta biến đổi:

$$xyz - xy - yz - zx + x + y + z - 1 = (xyz - xy) - (yz - y) - (zx - x) + (z - 1)$$
$$= xy(z - 1) - y(z - 1) - x(z - 1) + (z - 1)$$
$$= (z - 1)(xy - y - x + 1).$$

b. Ta biến đổi:

$$xyz + 3xy + 2xz + 6x + yz + 3y + 2z + 6 =$$
$$= (xyz + 2xz + yz + 2z) + (3xy + 6x + 3y + 6)$$
$$= z(xy + 2x + y + 2) + 3(xy + 2x + y + 2)$$
$$= (xy + 2x + y + 2)(z + 3).$$

Bài tập 7.

a. Ta biến đổi:

$$4x^2 - 9y^2 - 4x - 6y = (4x^2 - 9y^2) - (4x + 6y)$$
$$= (2x - 3y)(2x + 3y) - 2(2x + 3y) = (2x + 3y)(2x - 3y - 2).$$

b. Ta biến đổi:

$$x^3 - y^3 + 2x^2 - 2y^2 = (x^3 - y^3) + (2x^2 - 2y^2)$$
$$= (x - y)(x^2 + xy + y^2) + 2(x - y)(x + y)$$
$$= (x - y)(x^2 + xy + y^2 + 2x + 2y).$$

c. Ta biến đổi:

$$x^2 + y^2 + 2xy + yz + zx = (x^2 + y^2 + 2xy) + (yz + zx)$$
$$= (x + y)^2 + z(y + x) = (x + y)(x + y + z).$$

d. Ta biến đổi:

$$x^3 + y^3 + x^2y + y^2x + z^2x + z^2y = (x^3 + y^3) + (x^2y + y^2x) + (z^2x + z^2y)$$

$= (x + y)(x^2 - xy + y^2) + xy(x + y) + z^2(x + y)$
$= (x + y)(x^2 - xy + y^2 + xy + z^2) = (x + y)(x^2 + y^2 + z^2).$

Bài tập 8.

a. Ta biến đổi:

$$x^4 - 4x^3 + x^2 - 4x = (x^4 - 4x^3) + (x^2 - 4x) = x^3(x - 4) + x(x - 4)$$
$$= (x - 4)(x^3 + x) = x(x - 4)(x^2 + 1).$$

Từ đó, ta được:

$x(x - 4)(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x - 4 = 0$ hoặc $x^2 + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 4$.

Vậy, ta tìm được các nghiệm $x = 0$, $x = 4$.

b. Ta biến đổi:

$$x^2(x - 1) - 2x(x - 3) - 9(x - 1) = (x - 1)(x^2 - 9) - 2x(x - 3)$$
$$= (x - 1)(x - 3)(x + 3) - 2x(x - 3)$$
$$= (x - 3)[(x - 1)(x + 3) - 2x] = (x - 3)(x^2 - 3).$$

Từ đó, ta được:

$(x - 3)(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0$ hoặc $x^2 - 3 = 0$

$\Leftrightarrow x = 3$ hoặc $x = \pm\sqrt{3}$.

Vậy, ta tìm được các nghiệm $x = 3$, $x = \pm\sqrt{3}$.

Bài tập 9. Ta viết:

$$A = (13,5.5,8 + 4,2.13,5) - (8,3.4,2 + 5,8.8,3)$$
$$= 13,5(5,8 + 4,2) - 8,3(4,2 + 5,8) = (5,8 + 4,2)(13,5 - 8,3)$$
$$= 10.5,2 = 52.$$

Bài tập 10.

a. Ta biến đổi:

$$P = (xy + xz + 2x) - (y + z + 2) = x(y + z + 2) - (y + z + 2)$$
$$= (y + z + 2)(x - 1).$$

Khi đó, với $x = 101$, $y = 100$ và $z = 98$ ta được:

$$P = (100 + 98 + 2)(101 - 1) = 200.100 = 20000.$$

b. Ta biến đổi:

$$Q = (xyz - 3xy - 2xz + 6x) - (yz - 3y - 2z + 6)$$
$$= x(yz - 3y - 2z + 6) - (yz - 3y - 2z + 6) = (yz - 3y - 2z + 6)(x - 1)$$
$$= [(yz - 3y) - (2z - 6)](x - 1) = [y(z - 3) - 2(z - 3)](x - 1)$$
$$= (z - 3)(y - 2)(x - 1).$$

Khi đó, với $x = 101$, $y = 202$ và $z = 303$, ta được:

$$Q = (303 - 3)(202 - 2)(101 - 1) = 300.200.100 = 6000000.$$

Bài toán 4 — PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ BẰNG CÁCH TÁCH MỘT HẠNG TỬ THÀNH NHIỀU HẠNG TỬ

I. PHƯƠNG PHÁP

Giả sử cần phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$$x^2 + 4x + 3$$

với ba phương pháp đã biết trong ba bài toán 1, bài toán 2 và bài toán 3, chúng ta sẽ bắt đầu đặt câu hỏi:

1. Các hạng tử trong đa thức trên có nhân tử chung hay không ? - Câu trả lời thật đơn giản là *không*, điều đó có nghĩa là không thể sử dụng ngay phương pháp trong bài toán 1.
2. Các hạng tử trong đa thức trên có tạo ra những hằng đẳng thức hay không ? - Câu trả lời thật đơn giản là *không*, điều đó có nghĩa là không thể sử dụng ngay phương pháp trong bài toán 2.
3. Có thể sử dụng phương pháp nhóm các hạng tử hay không ? - Câu trả lời thật đơn giản là *không*, điều đó có nghĩa là không thể sử dụng ngay phương pháp trong bài toán 3.

Như vậy, cần có thêm một phương pháp khác để tạo ra được nhân tử chung. Ý tưởng được rút ra từ việc đánh giá theo chiều ngược lại của công việc:

$$(x + 1)(x + 3) = x(x + 3) + (x + 3) = x^2 + \underbrace{3x + x}_{\text{tách } 4x} + 3 = x^2 + 4x + 3.$$

Từ đó có thể tổng quát sơ bộ như sau:

" *Cho đa thức:*

$$A + B + C.$$

Nếu không thể sử dụng các phương pháp trong các bài toán 1, 2, 3 thì hãy thử với $(A + B_1)$ và $(C + B_2)$, trong đó $B = B_1 + B_2$ (Phương pháp được mở rộng khi thay vai trò của B bằng A hoặc C). "

Từ đó ta có thể thực hiện phân tích đa thức trên theo các cách:

Cách 1: (*Sử dụng phép tách theo B*): Ta có:

$$x^2 + 4x + 3 = x^2 + x + 3x + 3 = (x^2 + x) + (3x + 3)$$
$$= x(x + 1) + 3(x + 1) = (x + 1)(x + 3).$$

Cách 2: (*Sử dụng phép tách theo A*): Ta có:

$$x^2 + 4x + 3 = 4x^2 - 3x^2 + 4x + 3 = (4x^2 + 4x) - (3x^2 - 3)$$
$$= 4x(x + 1) - 3(x^2 - 1) = 4x(x + 1) - 3(x - 1)(x + 1)$$
$$= (x + 1)(4x - 3x + 3) = (x + 1)(x + 3).$$

Cách 3: (*Sử dụng phép tách theo C*): Ta có:

$$x^2 + 4x + 3 = x^2 + 4x + 4 - 1 = (x^2 - 1) + (4x + 4)$$
$$= (x - 1)(x + 1) + 4(x + 1) = (x + 1)(x - 1 + 4)$$
$$= (x + 1)(x + 3).$$

Cách 4: (Sử dụng phép tách tạo hằng đẳng thức): Ta có:

$$x^2 + 4x + 3 = x^2 + 2.2x + 2^2 - 1 = (x + 2)^2 - 1$$
$$= (x + 2 - 1)(x + 2 + 1) = (x + 1)(x + 3).$$

Cách làm như vậy được gọi là *phân tích đa thức thành nhân tử bằng cách tách một hạng tử thành nhiều hạng tử.*

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$$x^2 - 2x - 3.$$

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: (Sử dụng phép tách theo B): Ta có:

$$x^2 - 2x - 3 = x^2 + \underbrace{x - 3x}_{\text{tách } -2x = x - 3x} - 3 = (x^2 + x) - (3x + 3)$$
$$= x(x + 1) - 3(x + 1) = (x + 1)(x - 3).$$

Cách 2: (Sử dụng phép tách theo A): Ta có:

$$x^2 - 2x - 3 = \underbrace{3x^2 - 2x^2}_{\text{tách } x^2 = 3x^2 - 2x^2} - 2x - 3 = (3x^2 - 3) - (2x^2 + 2x)$$
$$= 3(x^2 - 1) - 2x(x + 1) = 3(x - 1)(x + 1) - 2x(x + 1)$$
$$= (x + 1)[3(x - 1) - 2x] = (x + 1)(x - 3).$$

Cách 3: (Sử dụng phép tách theo C): Ta có:

$$x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x \underbrace{- 2 - 1}_{\text{tách } -3 = -2 - 1} = (x^2 - 1) - (2x + 2)$$
$$= (x - 1)(x + 1) - 2(x + 1) = (x + 1)(x - 1 - 2)$$
$$= (x + 1)(x - 3).$$

Cách 4: (Sử dụng phép tách tạo hằng đẳng thức): Ta có:

$$x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2.x.1 + \underbrace{1 - 4}_{\text{tách } -3 = 1 - 4} = (x - 1)^2 - 4$$
$$= (x - 1 - 2)(x - 1 + 2) = (x - 3)(x + 1).$$

Chú ý: Để việc học đạt hiệu quả cao nhất, các em học sinh hãy thông qua ví dụ trên để tổng quát phương pháp phân tích thành nhân tử cho các đa thức dạng:

- $x^2 + bx + c$.
- $ax^2 + bx + c$.

Từ đó có thể vận dụng cho đa thức dạng $P^2 + b.P + c$.

Ví dụ 2: Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$$(x + y)^2 - 8(x + y) + 12.$$

Giải

Ta có:

$$(x + y)^2 - 8(x + y) + 12 = (x + y)^2 - 2.(x + y).4 + 16 - 4$$
$$= [(x + y) - 4]^2 - 2^2 = (x + y - 4)^2 - 2^2$$

$= (x + y - 4 - 2)(x + y - 4 + 2) = (x + y - 6)(x + y - 2).$

Nhận xét: Lời giải trên sử dụng phép tách để tạo thành hằng đẳng thức. Các em học sinh hãy thực hiện thêm việc phân tích bằng phép tách theo A, B, C.

Phương pháp tách để tạo thành hằng đẳng thức cho phép thực hiện được yêu cầu xác định về dấu của đa thức. Để minh hoạ chúng ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 3: Chứng minh rằng đa thức sau luôn dương với mọi giá trị của x:

$$x^2 - x + 1.$$

Giải

Ta có:

$$x^2 - x + 1 = x^2 - 2.x.\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Vì $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ với mọi x, nên $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$ với mọi x.

Vậy $x^2 - x + 1$ luôn dương với mọi giá trị của x.

Chú ý: Qua ví dụ trên các em học sinh có thể thực hiện được yêu cầu "*Tìm giá trị nhỏ nhất của đa thức $P = x^2 - x + 1$*", thật vậy:

$$P = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$$

suy ra $P_{min} = \frac{3}{4}$, đạt được khi $x = \frac{1}{2}$.

Chúng ta sẽ minh hoạ thêm việc thực hiện yêu cầu về tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của đa thức bằng ví dụ sau:

Ví dụ 4: Tìm giá trị nhỏ nhất của đa thức:

$$P = 4x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3.$$

Giải

Ta có:

$$4x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = (4x^2 - 4x + 1) + (y^2 - 2y + 1) + 1$$
$$= (2x - 1)^2 + (y - 1)^2 + 1.$$

Vì:

$(2x - 1)^2 \geq 0$, với mọi giá trị của x,

$(y - 1)^2 \geq 0$ với mọi giá trị của y,

nên:

$(2x - 1)^2 + (y - 1)^2 + 1 \geq 1$ với mọi giá trị của x và y.

Vậy $4x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3$ luôn dương với mọi giá trị của x và y.

Chú ý: Việc tách để tạo thành hằng đẳng thức như trên cho phép thực hiện được yêu cầu xác định về dấu của đa thức nhưng trong một vài trường hợp lại không thể thực hiện tiếp việc phân tích đa thức thành nhân tử. Với đòi hỏi này các em học sinh sẽ có được

hai phương pháp để lựa chọn được minh hoạ bằng ví dụ sau:

Ví dụ 5: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a. $x^6 + 26x^3 - 27$. b. $x^4 + 3x^2 + 4$.

Giải

a. Ta có:

$$x^6 + 26x^3 - 27 = (x^3)^2 + 2.x^3.13 + 13^2 - 196 = (x^3 + 13)^2 - 14^2$$
$$= (x^3 + 13 - 14)(x^3 + 13 + 14) = (x^3 - 1)(x^3 + 3^3)$$
$$= (x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 3)(x^2 - 3x + 9).$$

b. Ta có:

$$x^4 + 3x^2 + 4 = x^4 + 4x^2 - x^2 + 4 = (x^4 + 4x^2 + 4) - x^2$$
$$= (x^2 + 2)^2 - x^2 = (x^2 + 2 - x)(x^2 + 2 + x)$$
$$= (x^2 - x + 2)(x^2 + x + 2).$$

Ví dụ 6: Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$$2x^2 + xy - y^2.$$

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Ta có:

$$2x^2 + xy - y^2 = x^2 + x^2 + xy - y^2 = (x^2 - y^2) + (x^2 + xy)$$
$$= (x + y)(x - y) + x(x + y) = (x + y)(2x - y).$$

Cách 2: Ta có:

$$2x^2 + xy - y^2 = 2x^2 + 2xy - xy - y^2 = (2x^2 + 2xy) - (xy + y^2)$$
$$= 2x(x + y) - y(x + y) = (x + y)(2x - y).$$

Cách 3: Ta có:

$$2x^2 + xy - y^2 = 2x^2 + xy - 2y^2 + y^2 = (2x^2 - 2y^2) + (xy + y^2)$$
$$= 2(x^2 - y^2) + y(x + y) = 2(x - y)(x + y) + y(x + y)$$
$$= (x + y)(2x - y).$$

Chú ý: Phương pháp tách một hạng tử được mở rộng tự nhiên cho trường hợp cần tách nhiều hạng tử trong đa thức. Để minh hoạ chúng ta xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 7: Tìm x, biết:

$$x^3 - 6x^2 - x + 30 = 0.$$

Giải

Ta có:

$$x^3 - 6x^2 - x + 30 = x^3 - 8x^2 + 2x^2 + 15x - 16x + 30$$
$$= (x^3 + 2x^2) - (8x^2 + 16x) + (15x + 30)$$
$$= x^2(x + 2) - 8x(x + 2) + 15(x + 2)$$
$$= (x + 2)(x^2 - 8x + 15) = (x + 2)(x^2 - 3x - 5x + 15)$$
$$= (x + 2)[x(x - 3) - 5(x - 3)] = (x + 2)(x - 3)(x - 5).$$

Từ đó, ta được:

$(x + 2)(x - 3)(x - 5) = 0$, suy ra $x = -2$ hoặc $x = 3$ hoặc $x = 5$.

Ví dụ 8: Chứng minh rằng:

$$(n^4 - 6n^3 + 27n^2 - 54n + 32) \vdots 2 \text{ với } n \in \mathbb{Z}.$$

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned} n^4 - 6n^3 + 27n^2 - 54n + 32 &= n^4 - n^3 - 5n^3 + 5n^2 + 22n^2 - 22n - 32n + 32 \\ &= (n - 1)(n^3 - 5n^2 + 22n - 32) \\ &= (n - 1)(n^3 - 2n^2 - 3n^2 + 6n + 16n - 32) \\ &= (n - 1)(n - 2)(n^2 - 3n + 16). \end{aligned}$$

Bởi $(n - 2)$ và $(n - 1)$ là hai số tự nhiên liên tiếp, do đó tích của chúng chia hết cho 2, do đó:

$$(n^4 - 6n^3 + 27n^2 - 54n + 32) \vdots 2 \text{ với } n \in \mathbb{Z}.$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a. $x^2 + 2x - 3$.
c. $x^2 - 2x - 15$.
b. $x^2 - 10x + 9$.
d. $x^2 - 2x - 48$.

Bài tập 2. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a. $x^2 - 10x + 24$.
c. $3x^2 - 7x + 2$.
b. $4x^2 + 4x - 15$.
d. $4x^2 - 5x + 1$.

Bài tập 3. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a. $(x + y)^2 - 25(x + y) + 24$.
c. $x^8 + x^4 + 1$.
b. $(x - 2y)^2 - x + 2y - 30$.
d. $x^{64} + 3x^{32} + 4$.

Bài tập 4. Chứng minh rằng các đa thức sau luôn dương với mọi giá trị của biến số:

a. $x^2 + x + 1$.
d. $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 6$.
b. $4x^2 - 2x + 1$.
e. $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2xy + 2$.
c. $x^4 - 3x^2 + 9$.
f. $x^2 + 3xy + 3y^2$, với $x, y \neq 0$.

Bài tập 5. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a. $(x^2 + 4x + 8)^2 - 3x(x^2 + 4x + 8) + 2x^2$.
b. $x^5 - 5x^3 + 4$.
c. $x^4 + x^2 + 1$.

Bài tập 6. Tìm x, biết:

a. $x^2 + 5x + 6 = 0$.
d. $x^2 - 2x - 3 = 0$.
b. $x^2 - 10x + 16 = 0$.
e. $2x^2 + 7x + 3 = 0$.
c. $x^2 - 10x + 21 = 0$.
f. $x^2 - x - 6 = 0$.

Bài tập 7. Tìm x biết:

a. $x^3 + 2x^2 - 3 = 0$.

b. $x^3 - 7x - 6 = 0$.

c. $x^3 + x^2 + 4 = 0$.

d. $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$.

Bài tập 8. Tính giá trị của biểu thức:

$$P = x^2 + 3xy + 2y^2 \text{ với } x = 89 \text{ và } y = 11.$$

Bài tập 9. Chứng minh rằng các đa thức sau luôn dương với mọi giá trị của biến số:

a. $x^2 + x + 1$.

b. $x^2 + 3x + 3$.

c. $x^2 + y^2 + 2(x - 2y) + 6$.

d. $2x^2 + y^2 + 2x(y - 1) + 2$.

Bài tập 10. Tìm giá trị nhỏ nhất của đa thức:

a. $2x^2 + 4x + 1$.

b. $x^2 + 5x + 8$.

c. $x^2 + y^2 - 4(x + y) + 16$.

d. $x^2 + 2y^2 - 2(x - y - xy) + 12$.

Bài tập 11. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a. $-c^2(a - b) + b^2(a - c) - a^2(b - c)$.

b. $ab(a + b) - bc(b + c) - ac(c - a)$.

c. $(x - y) - x^3(1 - y) + y^3(1 - x)$.

IV. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. Ta biến đổi:

$$x^2 + 2x - 3 = x^2 - x + 3x - 3 = x(x - 1) + 3(x - 1) = (x - 1)(x + 3).$$

b. Ta biến đổi:

$$x^2 - 10x + 9 = x^2 - x - 9x + 9 = x(x - 1) - 9(x - 1) = (x - 1)(x - 9).$$

c. Ta biến đổi:

$$x^2 - 2x - 15 = x^2 - 2x + 1 - 16 = (x - 1)^2 - 16$$
$$= (x - 1 - 4)(x - 1 + 4) = (x - 5)(x + 3).$$

d. Ta biến đổi:

$$x^2 - 2x - 48 = x^2 - 2x + 1 - 49 = (x - 1)^2 - 49$$
$$= (x - 1 - 7)(x - 1 + 7) = (x - 8)(x + 6).$$

Bài tập 2.

a. Ta biến đổi:

$$x^2 - 10x + 24 = x^2 - 10x + 25 - 1 = (x - 5)^2 - 1$$
$$= (x - 5 - 1)(x - 5 + 1) = (x - 6)(x - 4).$$

b. Ta biến đổi:

$$4x^2 + 4x - 15 = 4x^2 + 4x + 1 - 16 = (2x + 1)^2 - 16$$
$$= (2x + 1 - 4)(2x + 1 + 4) = (2x - 3)(2x + 5).$$

c. Ta biến đổi:

$$3x^2 - 7x + 2 = 3x^2 - 6x - x + 2 = 3x(x - 2) - (x - 2) = (x - 2)(3x - 1)$$

d. Ta biến đổi:

$$4x^2 - 5x + 1 = 4x^2 - 4x - x + 1 = 4x(x - 1) - (x - 1) = (x - 1)(4x - 1).$$

Bài tập 3.

a. Ta biến đổi:

$$(x + y)^2 - 25(x + y) + 24 = (x + y)^2 - (x + y) - 24(x + y) + 24$$
$$= (x + y)(x + y - 1) - 24(x + y - 1)$$
$$= (x + y - 1)(x + y - 24).$$

b. Ta biến đổi:

$$(x - 2y)^2 - x + 2y - 30 = (x - 2y)^2 - (x - 2y) - 30$$
$$= (x - 2y)^2 - 6(x - 2y) + 5(x - 2y) - 30$$
$$= (x - 2y)(x - 2y - 6) + 5(x - 2y - 6)$$
$$= (x - 2y - 6)(x - 2y + 5).$$

c. Ta biến đổi:

$$x^8 + x^4 + 1 = x^8 + 2x^4 - x^4 + 1 = (x^8 + 2x^4 + 1) - x^4$$
$$= (x^4 + 1)^2 - x^4 = (x^4 + 1 - x^2)(x^4 + 1 + x^2)$$
$$= (x^4 - x^2 + 1)(x^4 + 2x^2 + 1 - x^2)$$
$$= (x^4 - x^2 + 1)[(x^2 + 1)^2 - x^2]$$
$$= (x^4 - x^2 + 1)(x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x).$$

d. Ta biến đổi:

$$x^{64} + 3x^{32} + 4 = x^{64} + 4x^{32} + 4 - x^{32} = (x^{32} + 2)^2 - x^{32}$$
$$= (x^{32} + 2 - x^{16})(x^{32} + 2 + x^{16}).$$

Bài tập 4.

a. Ta biến đổi:

$$x^2 + x + 1 = x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall x.$$

b. Ta biến đổi:

$$4x^2 - 2x + 1 = 3x^2 + x^2 - 2x + 1 = 3x^2 + (x - 1)^2 > 0, \forall x.$$

c. Ta biến đổi:

$$x^4 - 3x^2 + 9 = x^4 - 4x^2 + x^2 + 4 + 5 = x^4 - 4x^2 + 4 + x^2 + 5$$
$$= (x^2 - 2)^2 + x^2 + 5 > 0, \forall x.$$

d. Ta biến đổi:

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 6 = (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) + 1$$
$$= (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + 1 > 0, \forall x, y.$$

e. Ta biến đổi:

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2xy + 2 = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2xy + 1 + 1$$
$$= (x + y - 1)^2 + 1 > 0, \forall x, y.$$

f. Ta biến đổi:

$$x^2 + 3xy + 3y^2 = x^2 + 3xy + \frac{9}{4}y^2 + \frac{3}{4}y^2$$

$$= (x + \frac{3}{2}y)^2 + \frac{3}{4}y^2 > 0, \forall x, y \neq 0.$$

Bài tập 5.

a. Ta biến đổi:

$$(x^2 + 4x + 8)^2 - 3x(x^2 + 4x + 8) + 2x^2 =$$

$$= (x^2 + 4x + 8)^2 - 2x(x^2 + 4x + 8) - x(x^2 + 4x + 8) + 2x^2$$

$$= (x^2 + 4x + 8)(x^2 + 4x + 8 - 2x) - x(x^2 + 4x + 8 - 2x)$$

$$= (x^2 + 2x + 8)(x^2 + 4x + 8 - x)$$

$$= (x^2 + 2x + 8)(x^2 + 3x + 8).$$

b. Ta biến đổi:

$$x^5 - 5x^3 + 4 = x^5 - x^3 - 4x^3 + 4 = x^3(x^2 - 1) - 4(x^3 - 1)$$

$$= x^3(x - 1)(x + 1) - 4(x - 1)(x^2 + x + 1)$$

$$= (x - 1)[x^3(x + 1) - 4(x^2 + x + 1)]$$

$$= (x - 1)(x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x - 4).$$

c. Ta biến đổi:

$$x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2$$

$$= (x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x).$$

Bài tập 6.

a. $x = -2, x = -3$.

b. $x = 2, x = 8$.

c. $x = 3, x = 7$.

d. $x = -1, x = 3$.

e. $x = -3, x = -\frac{1}{2}$.

f. $x = 3, x = -2$.

Bài tập 7.

a. Ta có:

$$x^3 + 2x^2 - 3 = (x - 1)(x^2 + 3x + 3) = (x - 1)[(x + \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4}]$$

nên phương trình có nghiệm $x = 1$.

b. Ta có:

$$x^3 - 7x - 6 = (x + 1)(x - 3)(x + 2)$$

nên phương trình có nghiệm $x = -1, x = 3, x= -2$.

c. Ta có:

$$x^3 + x^2 + 4 = (x + 2)(x^2 - x + 2) = (x + 2)[(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}]$$

nên phương trình có nghiệm $x = -2$.

d. Ta có:

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x - 1)(x + 1)(x - 2)$$
nên phương trình có nghiệm $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$.

Bài tập 8. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 9.

a. $x^2 + x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$ với mọi x.

b. $x^2 + 3x + 3 = (x + \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$ với mọi x.

c. $x^2 + y^2 + 2(x - 2y) + 6 = (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + 1 > 0$ với mọi x, y.

d. $2x^2 + y^2 + 2x(y - 1) + 2 = (x + y)^2 + (x - 1)^2 + 1 > 0$ với mọi x, y.

Bài toán 5 — PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ BẰNG CÁCH THÊM BỚT CÙNG MỘT HẠNG TỬ THÍCH HỢP

I. PHƯƠNG PHÁP

Để đặt vấn đề, chúng ta hãy bắt đầu với việc khai triển đa thức:

$$(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2) = (x^2 + 2 + 2x)(x^2 + 2 - 2x)$$
$$= (x^2 + 2)^2 - 4x^2 = x^4 + 4 + \underbrace{4x^2 - 4x^2}_{\text{thêm và bớt}}$$
$$= x^4 + 4.$$

Khi đó với yêu cầu ngược lại " *Hãy phân tích đa thức $x^4 + 4$ thành nhân tử* " chúng ta cần thực hiện theo chiều ngược lại các bước ở trên và ở đó có sự xuất hiện của hạng tử $4x^2$ và $-4x^2$.

Cách làm như vậy được gọi là *phân tích đa thức thành nhân tử bằng cách thêm bớt cùng một hạng tử thích hợp.*

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Phân tích đa thức sau thành nhân tử:
$$x^4 + 1.$$

Giải

Ta có:
$$x^4 + 1 = x^4 + 1 + 2x^2 - 2x^2 = (x^4 + 2x^2 + 1) - 2x^2$$
$$= (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}\,x)^2 = (x^2 + 1 - \sqrt{2}\,x)(x^2 + 1 + \sqrt{2}\,x)$$
$$= (x^2 - \sqrt{2}\,x + 1)(x^2 + \sqrt{2}\,x + 1).$$

Ví dụ 2: Tính giá trị của biểu thức:
$$P = x^4 + 2x^3 + 2(x^2 + 1)(x^2 + 6x - 1) + (x^2 + 6x - 1)^2$$
với $2x^2 + 6x = 99$.

Giải

Ta có:

$$P = (x^4 + 2x^2 + 1) + 2(x^2 + 1)(x^2 + 6x - 1) + (x^2 + 6x - 1)^2 - 1$$
$$= (x^2 + 1)^2 + 2(x^2 + 1)(x^2 + 6x - 1) + (x^2 + 6x - 1)^2 - 1$$
$$= [(x^2 + 1) + (x^2 + 6x - 1)]^2 - 1 = (2x^2 + 6x)^2 - 1$$
$$= (2x^2 + 6x - 1)(2x^2 + 6x + 1).$$

Suy ra:

$$P = (99 - 1)(99 + 1) = 9800.$$

Chú ý: Phương pháp thêm bớt một hạng tử được mở rộng tự nhiên khi cần thêm, bớt nhiều hạng tử, để minh hoạ chúng ta xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 3: Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$$x^8 + x + 1.$$

Giải

Ta có:

$$x^8 + x + 1 = x^8 + x^4 - x^4 + x^2 - x^2 + x + 1$$
$$= (x^8 + x^4 + 1) - (x^4 + x^2 + 1) + (x^2 + x + 1) \quad (1)$$

trong đó:

$$x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 - x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2$$
$$= (x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x)$$
$$= (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) \quad (2)$$

$$x^8 + x^4 + 1 = x^8 + 2x^4 - x^4 + 1 = (x^8 + 2x^4 + 1) - x^4$$
$$= (x^4 + 1)^2 - (x^2)^2 = (x^4 + 1 - x^2)(x^4 + 1 + x^2)$$
$$= (x^4 - x^2 + 1)(x^4 + x^2 + 1)$$
$$= (x^4 - x^2 + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1). \quad (2)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được:

$$x^8 + x + 1 = (x^4 - x^2 + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$$
$$- (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)$$
$$= (x^2 + x + 1)[(x^4 - x^2 + 1)(x^2 - x + 1) - (x^2 - x + 1) + 1]$$
$$= (x^2 + x + 1)(x^6 - x^5 + x^3 - x^2 + 1).$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a. $x^4 + 4$.
b. $x^4 + 64$.
c. $4x^4 + 1$.
d. $64x^4 + 1$.

Bài tập 2. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a. $x^4 + 4y^4$.
b. $x^4y^4 + 4$.
c. $x^4y^4 + 64$.

Bài tập 3. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a. $a^2 - b^2 - 2x(a - b)$.
b. $a^2 - b^2 - 2x(a + b)$

Bài tập 4. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a. $x^8 + x^7 + 1$.
b. $x^5 + x + 1$.

IV. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. Ta biến đổi:

$$x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 - 4x^2 + 4 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2$$
$$= (x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x).$$

b. Ta biến đổi:

$$x^4 + 64 = x^4 + 16x^2 - 16x^2 + 64 = (x^2 + 8)^2 - 16x^2$$
$$= (x^2 + 8 - 4x)(x^2 + 8 + 4x).$$

c. Ta biến đổi:

$$4x^4 + 1 = 4x^4 + 4x^2 - 4x^2 + 1 = (2x^2 + 1)^2 - 4x^2$$
$$= (2x^2 + 1 - 2x)(2x^2 + 1 + 2x).$$

d. Ta biến đổi:

$$64x^4 + 1 = 64x^4 + 16x^2 - 16x^2 + 1 = (8x^2 + 1)^2 - 16x^2$$
$$= (8x^2 + 1 - 4x)(8x^2 + 1 + 4x).$$

Bài tập 2.

a. Ta biến đổi:

$$x^4 + 4y^4 = x^4 + 4x^2y^2 - 4x^2y^2 + 4y^4 = (x^2 + 2y^2)^2 - 4x^2y^2$$
$$= (x^2 + 2y^2 - 2xy)(x^2 + 2y^2 + 2xy)$$

b. Ta biến đổi:

$$x^4y^4 + 4 = x^4y^4 + 4x^2y^2 - 4x^2y^2 + 4 = (x^2y^2 + 2)^2 - 4x^2y^2$$
$$= (x^2y^2 + 2 - 2xy)(x^2y^2 + 2 + 2xy)$$

c. Ta biến đổi:

$$x^4y^4 + 64 = x^4y^4 + 16x^2y^2 - 16x^2y^2 + 64$$
$$= (x^2y^2 + 8)^2 - 16x^2y^2$$
$$= (x^2y^2 + 8 - 4xy)(x^2y^2 + 8 + 4xy)$$

Bài tập 3. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 4.

a. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách thêm bớt sau:

Cách 1: Biến đổi:

$$x^8 + x^7 + 1 = x^8 + x^7 + x^6 - x^6 + 1 = x^6(x^2 + x + 1) - (x^6 - 1)$$
$$= x^6(x^2 + x + 1) - (x^3 - 1)(x^3 + 1)$$
$$= x^6(x^2 + x + 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1)(x^3 + 1)$$
$$= (x^2 + x + 1)[x^6 - (x - 1)(x^3 + 1)]$$
$$= (x^2 + x + 1)(x^6 - x^4 + x^3 - x + 1).$$

Cách 2: Biến đổi:

$$x^8 + x^7 + 1$$
$$= x^8 + x^7 + x^6 - x^6 + x^5 - x^5 + x^4 - x^4 + x^3 - x^3 + x^2 - x^2 + x - x + 1$$
$$= (x^8 + x^7 + x^6) - (x^6 + x^5 + x^4) + (x^5 + x^4 + x^3) - (x^3 + x^2 + x) + (x^2 + x + 1)$$
$$= x^6(x^2 + x + 1) - x^4(x^2 + x + 1) + x^3(x^2 + x + 1)$$
$$- x(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)$$
$$= (x^2 + x + 1)(x^6 - x^4 + x^3 - x + 1).$$

b. Ta biến đổi:

$$x^5 + x + 1 = x^5 + x^4 - x^4 + x^3 - x^3 + x^2 - x^2 + x + 1$$
$$= (x^5 + x^4 + x^3) - (x^4 + x^3 + x^2) + (x^2 + x + 1)$$
$$= x^3(x^2 + x + 1) - x^2(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)$$
$$= (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1).$$

Bài toán 6 — PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ BẰNG CÁCH PHỐI HỢP NHIỀU PHƯƠNG PHÁP

I. PHƯƠNG PHÁP

Để đặt vấn đề, chúng ta hãy bắt đầu với việc phân tích đa thức:

$$x^2y - 4xy + 4y - 4y^3 = y(x^2 - 4x + 4 - 4y^2) \quad \textit{Bước 1}$$
$$= y[(x^2 - 4x + 4) - 4y^2] \quad \textit{Bước 2}$$
$$= y[(x - 2)^2 - (2y)^2] \quad \textit{Bước 3}$$
$$= y(x - 2 - 2y)(x - 2 + 2y). \quad \textit{Bước 4}$$

Như vậy, để phân tích đa thức trên thành nhân tử chúng ta cần thực hiện qua bốn bước và ở đó:

Bước 1: Chúng ta sử dụng phương pháp đặt nhân tử chung.

Bước 2: Chúng ta sử dụng phương pháp nhóm nhiều hạng tử.

Bước 3: Chúng ta sử dụng phương pháp dùng hằng đẳng thức.

Bước 4: Chúng ta sử dụng phương pháp dùng hằng đẳng thức.

điều đó có nghĩa là để phân tích đa thức thành nhân tử trong nhiều trường hợp nếu chỉ sử dụng đơn thuần từng phương pháp đã biết trong các bài toán 1, bài toán 2, bài toán 3, bài toán 4 và bài toán 5 sẽ không thể thực hiện được.

Cách làm như vậy được gọi là *phân tích đa thức thành nhân tử bằng cách phối hợp nhiều phương pháp*.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$$16x^4(x - y) - x + y.$$

Giải

Ta có:

$$16x^4(x - y) - x + y = 16x^4(x - y) - (x - y)$$
$$= (x - y)(16x^4 - 1)$$
$$= (x - y)(4x^2 - 1)(4x^2 + 1)$$
$$= (x - y)(2x - 1)(2x + 1)(4x^2 + 1).$$

Nhận xét: Như vậy, để phân tích đa thức trên thành nhân tử chúng ta thực hiện qua bốn bước và:

- Ở bước 1 chúng ta sử dụng phương pháp nhóm nhiều hạng tử.

- Ở bước 2 chúng ta sử dụng phương pháp đặt nhân tử chung.
- Ở bước 3 và bước 4 chúng ta sử dụng phương pháp dùng hằng đẳng thức.

Ví dụ 2: Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$$2x^3y - 2xy^3 - 4xy^2 - 2xy.$$

Giải

Ta có:

$$2x^3y - 2xy^3 - 4xy^2 - 2xy = 2xy(x^2 - y^2 - 2y - 1)$$
$$= 2xy[x^2 - (y^2 + 2y + 1)] = 2xy[x^2 - (y + 1)^2]$$
$$= 2xy(x - y - 1)(x + y + 1).$$

Yêu cầu: Các em học sinh hãy cho biết tên phương pháp được sử dụng trong mỗi bước để phân tích đa thức trên thành nhân tử.

Ví dụ 3: Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$$x^4 - x^2 + 2x + 2.$$

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Ta có:

$$x^4 - x^2 + 2x + 2 = x^4 - 2x^2 + x^2 + 2x + 1 + 1$$
$$= (x^4 - 2x^2 + 1) + (x^2 + 2x + 1) = (x^2 - 1)^2 + (x + 1)^2$$
$$= (x - 1)^2(x + 1)^2 + (x + 1)^2 = (x + 1)^2[(x - 1)^2 + 1]$$
$$= (x + 1)^2(x^2 - 2x + 2).$$

Cách 2: Ta có:

$$x^4 - x^2 + 2x + 2 = (x^4 - x^2) + (2x + 2)$$
$$= x^2(x^2 - 1) + 2(x + 1) = x^2(x - 1)(x + 1) + 2(x + 1)$$
$$= (x + 1)[x^2(x - 1) + 2] = (x + 1)(x^3 - x^2 + 2)$$
$$= (x + 1)[(x^3 + 1) - (x^2 - 1)] = (x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1 - x + 1)$$
$$= (x + 1)^2(x^2 - 2x + 2).$$

Yêu cầu: 1. Các em học sinh hãy cho biết tên phương pháp được sử dụng trong mỗi bước để phân tích đa thức trên thành nhân tử.

2. Nếu yêu cầu được phát biểu dưới dạng :

" *Tìm x, biết:*

$$x^4 - x^2 + 2x + 2 = 0"$$

em sẽ lựa chọn phương pháp nào ? Vì sao ? Và khi đó nghiệm x bằng bao nhiêu ?

Ví dụ 4: Tính giá trị của biểu thức:

$$P = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 \text{ với } x^2 - y^2 = 4.$$

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Ta có:

$$P = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = \frac{1}{2}[(x^2 + y^2)^2 - 4x^2y^2]$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 2xy)(x^2 + y^2 + 2xy) = \frac{1}{2}(x - y)^2(x + y)^2 = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)^2$$

Suy ra:

$$P = \frac{1}{2}.4^2 = 8.$$

Cách 2: Ta có:

$$P = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = \frac{1}{2}[(x^2 + y^2)^2 - 4x^2y^2]$$

$$= \frac{1}{2}(x^4 + y^4 - 2x^2y^2) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)^2.$$

Suy ra:

$$P = \frac{1}{2}.4^2 = 8.$$

Ví dụ 5: Tìm x, biết:

$$x^9 + x^8 - x - 1 = 0.$$

Giải

Ta có:

$$x^9 + x^8 - x - 1 = (x^9 + x^8) - (x + 1) = x^8(x + 1) - (x + 1)$$
$$= (x + 1)(x^8 - 1) = (x + 1)(x^4 - 1)(x^4 + 1)$$
$$= (x + 1)(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)$$
$$= (x + 1)(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1).$$

từ đó ta được:

$$(x + 1)(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = 0$$

suy ra $x = -1$ hoặc $x = 1$.

Ví dụ 6:

a. Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$$x^3(x^2 - 7)^2 - 36x$$

từ đó suy ra nghiệm của phương trình $x^3(x^2 - 7)^2 - 36x = 0$.

b. Chứng minh rằng $T = [n^3(n^2 - 7)^2 - 36n] \vdots 7$ với $n \in \mathbb{Z}$.

Giải

a. Ta có:

$$x^3(x^2 - 7)^2 - 36x = x[x^2(x^2 - 7)^2 - 36]$$
$$= x[x(x^2 - 7) - 6][x(x^2 - 7) + 6]$$
$$= x(x^3 - 7x - 6)(x^3 - 7x + 6)$$
$$= x(x^3 - x - 6x - 6)(x^3 - x - 6x + 6)$$
$$= x[x(x^2 - 1) - 6(x + 1)][x(x^2 - 1) - 6(x - 1)]$$
$$= x(x + 1)[x(x - 1) - 6](x - 1)[x(x + 1) - 6]$$
$$= x(x + 1)(x^2 - x - 6)(x - 1)(x^2 + x - 6)$$
$$= x(x + 1)(x^2 + 2x - 3x - 6)(x - 1)(x^2 - 2x + 3x - 6)$$
$$= x(x + 1)[x(x+2) - 3(x + 2)](x - 1)[x(x - 2) + 3(x - 2)]$$

$= x(x+1)(x+2)(x-3)(x-1)(x-2)(x+3).$

Từ đó, ta được:

$$x(x+1)(x+2)(x-3)(x-1)(x-2)(x+3) = 0$$

suy ra $x = 0$ hoặc $x = \pm 1$ hoặc $x = \pm 2$ hoặc $x = \pm 3$.

b. Theo câu a) ta có:

$$n^3(n^2-7)^2 - 36n = (n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3).$$

đó là tích của 7 số nguyên liên tiếp nên T chia hết cho 7.

Chú ý: Nếu cần phải đưa ra một đánh giá chính xác hơn thì có thể khẳng định T chia hết cho số nào ? Vì sao ?

Ví dụ 7:

a. Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$$A = a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2.$$

b. Hãy xác định dấu của A khi a, b, c là ba cạnh của một tam giác.

Giải

a. Ta có:

$$A = a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2$$
$$= (a^4 + 2a^2b^2 + b^4) - (2b^2c^2 + 2c^2a^2) + c^4 - 4a^2b^2$$
$$= (a^2+b^2)^2 - 2(a^2+b^2)c^2 + c^4 - 4a^2b^2 = (a^2+b^2-c^2)^2 - 4a^2b^2$$
$$= (a^2+b^2-c^2-2ab)(a^2+b^2-c^2+2ab)$$
$$= [(a^2+b^2-2ab)-c^2][(a^2+b^2+2ab)-c^2] = [(a-b)^2-c^2][(a+b)^2-c^2]$$
$$= (a-b-c)(a-b+c)(a+b-c)(a+b+c).$$

Khi a, b, c là ba cạnh của một tam giác, ta có:

$a - b - c < 0$,

$a - b + c > 0$,

$a + b - c > 0$,

$a + b + c > 0$,

do đó $A < 0$.

Yêu cầu: Các em học sinh hãy đưa ra một cách nhóm khác để phân tích A thành nhân tử, và hãy so sánh cách làm của Em với cách làm trên

Ví dụ 8:

a. Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$$A = x(y^2 - z^2) + y(z^2 - x^2) + z(x^2 - y^2).$$

b. Hãy tính giá trị của A khi x, y, z là ba số tự nhiên liên tiếp.

Giải

a. Ta có:

$$A = x(y^2-z^2) + y(z^2-x^2) + z(x^2-y^2) = xy^2 - xz^2 + yz^2 - yx^2 + z(x^2-y^2)$$
$$= (xy^2 - yx^2) + (yz^2 - xz^2) + z(x^2 - y^2)$$
$$= xy(y-x) + z^2(y-x) + z(x-y)(x+y)$$
$$= (y-x)[xy + z^2 - z(x+y)] = (y-x)(xy + z^2 - zx - zy)$$
$$= (y-x)[(xy - zx) + (z^2 - zy)] = (y-x)[x(y-z) + z(z-y)]$$
$$= (y-x)(y-z)(x-z).$$

b. Khi x, y, z là ba số tự nhiên liên tiếp, ta có:

$y - x = 1,$

$y - z = -1,$

$x - z = -2,$

suy ra $A = 1.(-1).(-2) = 2.$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a. $16x^3 - 54y^3.$

b. $16x^3y + \frac{1}{4}yz^3.$

c. $5x^2 - 5y^2.$

d. $2x^4 - 32.$

Bài tập 2. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a. $x^4 - 4x^3 + 4x^2.$

b. $2xy^2 - x^2y - y^3.$

c. $2x^2 + 4xy + 2y^2.$

d. $5x^4 - 10x^2y^2 + 5y^4.$

e. $9x^2(x + y) - x - y.$

f. $81x^4(z^2 - y^2) - z^2 + y^2.$

Bài tập 3. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a. $4x - 4y + x^2 - 2xy + y^2.$

b. $x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 8x.$

c. $x^3 + x^2 - 4x - 4.$

d. $x^4 - x^2 + 2x - 1.$

e. $x^3 + 3x^2 - 3x - 1.$

f. $x^3 - 3x^2 - 3x + 1.$

g. $x^4 + x^3 + x^2 - 1.$

h. $x^3 - 4x^2 + 4x - 1.$

Bài tập 4. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a. $x^3 + x^2y - xy^2 - y^3.$

b. $x^2y^2 + 1 - x^2 - y^2.$

c. $4x^2y^2 - (x^2 + y^2 - 1)^2.$

d. $(xy + 4)^2 - (2x + 2y)^2.$

Bài tập 5. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a. $x^2 - y^2 - 4x + 4y.$

b. $x^2 - y^2 - 2x - 2y.$

c. $x^3 - y^3 - 3x + 3y.$

d. $(x^2 + y^2 + xy)^2 - x^2y^2 - y^2z^2 - z^2x^2.$

e. $3x - 3y + x^2 - 2xy + y^2.$

f. $x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1.$

Bài tập 6. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a. $\frac{1}{a}(x^2 + y^2) - ax^2y^2.$

b. $4x^2y + \frac{1}{2}yz^3.$

Bài tập 7. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a. $x^8 + x^4 + 1.$

b. $x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4.$

c. $x^{11} + x^{10} + ... + x^2 + x + 1.$

d. $(x + y)(x + 2y)(x + 3y)(x + 4y) + y^4.$

Bài tập 8. Tìm x, biết:

a. $x^3 - x^2 - x + 1 = 0.$

b. $x^4 + 2x^3 - 6x - 9 = 0.$

Bài tập 9. Tính nhanh giá trị của biểu thức:

$$x^2 - y^2 - 2y - 1 \text{ tại } x = 4,5 \text{ và } y = 94,5.$$

Bài tập 10. Chứng minh rằng $n^3 - n$ chia hết cho 6 với mọi số nguyên n.

Bài tập 11.

a. Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$$A = (x - y)z^3 + (y - z)x^3 + (z - x)y^3.$$

b. Hãy tính giá trị của A khi x, y, z là ba số tự nhiên liên tiếp có tổng bằng 36.

IV. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. $16x^3 - 54y^3 = 2(8x^3 - 27y^3) = 2(2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2)$.

b. $16x^3y + \frac{1}{4}yz^3 = \frac{1}{4}y(64x^3 + z^3) = \frac{1}{4}y(4x + z)(16x^2 + 4xz + z^2)$.

c. $5x^2 - 5y^2 = 5(x^2 - y^2) = 5(x - y)(x + y)$.

d. $2x^4 - 32 = 2(x^4 - 16) = 2(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 2(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$.

Bài tập 2.

a. $x^4 - 4x^3 + 4x^2 = x^2(x^2 - 4x + 4) = x^2(x - 2)^2$.

b. $2xy^2 - x^2y - y^3 = -y(-2xy + x^2 + y^2) = -y(x - y)^2$.

c. $2x^2 + 4xy + 2y^2 = 2(x^2 + 2xy + y^2) = 2(x + y)^2$.

d. Ta biến đổi:

$$5x^4 - 10x^2y^2 + 5y^4 = 5(x^4 - 2x^2y^2 + y^4) = 5(x^2 - y^2)^2$$
$$= 5(x - y)^2(x + y)^2.$$

e. Ta biến đổi:

$$9x^2(x + y) - x - y = 9x^2(x + y) - (x + y) = (x + y)(9x^2 - 1)$$
$$= (x + y)(3x - 1)(3x + 1).$$

f. Ta biến đổi:

$$81x^4(z^2 - y^2) - z^2 + y^2 = 81x^4(z^2 - y^2) - (z^2 - y^2)$$
$$= (z^2 - y^2)(81x^4 - 1) = (z - y)(z + y)(9x^2 - 1)(9x^2 + 1)$$
$$= (z - y)(z + y)(3x - 1)(3x + 1)(9x^2 + 1).$$

Bài tập 3.

a. Ta biến đổi:

$$4x - 4y + x^2 - 2xy + y^2 = (4x - 4y) + (x^2 - 2xy + y^2)$$
$$= 4(x - y) + (x - y)^2 = (x - y)(4 + x - y).$$

b. Ta biến đổi:

$$x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 8x = x(x^3 - 4x^2 - 8x + 8)$$
$$= x(x^3 + 2x^2 - 6x^2 - 12x + 4x + 8)$$
$$= x[x^2(x + 2) - 6x(x + 2) + 4(x + 2)]$$
$$= x(x + 2)(x^2 - 6x + 4).$$

c. Ta biến đổi:

$$x^3 + x^2 - 4x - 4 = (x^3 + x^2) - (4x + 4) = x^2(x + 1) - 4(x + 1)$$
$$= (x + 1)(x^2 - 4) = (x + 1)(x - 2)(x + 2).$$

d. Ta biến đổi:

$$x^4 - x^2 + 2x - 1 = x^4 - (x^2 - 2x + 1) = x^4 - (x - 1)^2$$
$$= (x^2 - x + 1)(x^2 + x - 1).$$

e. Ta biến đổi:

$$x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = (x^3 - 1) + (3x^2 - 3x)$$
$$= (x - 1)(x^2 + x + 1) + 3x(x - 1) = (x - 1)(x^2 + 4x + 1).$$

f. Ta biến đổi:

$$x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = (x^3 + 1) - (3x^2 + 3x)$$
$$= (x + 1)(x^2 - x + 1) - 3x(x + 1) = (x + 1)(x^2 - 4x + 1).$$

g. Ta biến đổi:

$$x^4 + x^3 + x^2 - 1 = (x^4 + x^3) + (x^2 - 1) = x^3(x + 1) + (x - 1)(x + 1)$$
$$= (x + 1)(x^2 + x - 1).$$

h. Ta biến đổi:

$$x^3 - 4x^2 + 4x - 1 = (x^3 - 1) - (4x^2 - 4x)$$
$$= (x - 1)(x^2 + x + 1) - 4x(x - 1)$$
$$= (x - 1)(x^2 + x + 1 - 4x) = (x - 1)(x^2 - 3x + 1).$$

Bài tập 4.

a. Ta biến đổi:

$$x^3 + x^2y - xy^2 - y^3 = (x^3 + x^2y) - (xy^2 + y^3) = x^2(x + y) - y^2(x + y)$$
$$= x^2(x + y) - y^2(x + y) = (x + y)(x^2 - y^2)$$
$$= (x + y)^2(x - y).$$

b. Ta biến đổi:

$$x^2y^2 + 1 - x^2 - y^2 = (x^2y^2 - x^2) - (y^2 - 1) = x^2(y^2 - 1) - (y^2 - 1)$$
$$= (y^2 - 1)(x^2 - 1) = (y - 1)(y + 1)(x - 1)(x + 1).$$

c. Ta biến đổi:

$$4x^2y^2 - (x^2 + y^2 - 1)^2 = (2xy - x^2 - y^2 + 1)(2xy + x^2 + y^2 - 1)$$
$$= [1 - (x - y)^2][(x + y)^2 - 1]$$
$$= (1 - x + y)(1 + x - y)(x + y - 1)(x + y + 1).$$

d. Ta biến đổi:

$$(xy + 4)^2 - (2x + 2y)^2 = (xy + 4 - 2x - 2y)(xy + 4 + 2x + 2y)$$
$$= [(xy - 2x) - (2y - 4)][(xy + 2x) + (2y + 4)]$$
$$= [x(y - 2) - 2(y - 2)][x(y + 2) + 2(y + 2)]$$
$$= (y - 2)(x - 2)(y + 2)(x + 2).$$

Bài tập 5.

a. Ta biến đổi:

$$x^2 - y^2 - 4x + 4y = (x^2 - y^2) - (4x - 4y)$$
$$= (x - y)(x + y) - 4(x - y) = (x - y)(x + y - 4).$$

b. Ta biến đổi:

$$x^2 - y^2 - 2x - 2y = (x^2 - y^2) - (2x + 2y)$$
$$= (x - y)(x + y) - 2(x + y) = (x + y)(x - y - 2).$$

c. Ta biến đổi:

$$x^3 - y^3 - 3x + 3y = (x^3 - y^3) - (3x - 3y)$$
$$= (x - y)(x^2 + xy + y^2) - 3(x - y) = (x - y)(x^2 + xy + y^2 - 3).$$

d. Ta biến đổi:

$$(x^2 + y^2 + xy)^2 - x^2y^2 - y^2z^2 - z^2x^2$$
$$= [(x^2 + y^2 + xy)^2 - x^2y^2] - (y^2z^2 + z^2x^2)$$
$$= (x^2 + y^2 + xy - xy)(x^2 + y^2 + xy + xy) - z^2(y^2 + x^2)$$
$$= (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + xy + xy) - z^2(x^2 + y^2)$$
$$= (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + xy + xy - z^2).$$

e. Ta biến đổi:

$$3x - 3y + x^2 - 2xy + y^2 = (3x - 3y) + (x^2 - 2xy + y^2)$$
$$= 3(x - y) + (x - y)^2 = (x - y)(3 + x - y).$$

f. $x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = (x + y - 1)^2$.

Bài tập 6.

a. Ta biến đổi:

$$\frac{1}{a}(x^2+y^2)^2 - ax^2y^2 = \frac{1}{a}[(x^2+y^2)^2 - a^2x^2y^2] = \frac{1}{a}(x^2+y^2-axy)(x^2+y^2+axy).$$

b. Ta biến đổi:

$$4x^3y + \frac{1}{2}yz^3 = \frac{1}{2}y(8x^3+z^3) = \frac{1}{2}y(2x+z)(4x^2-2xz+z^2).$$

Bài tập 7.

a. Ta biến đổi:

$$x^8+x^4+1 = (x^8+2x^4+1) - x^4 = (x^4+1)^2 - x^4$$
$$= (x^4+1-x^2)(x^4+1+x^2) = (x^4+1-x^2)[(x^4+2x^2+1)-x^2]$$
$$= (x^4+1-x^2)[(x^2+1)^2-x^2] = (x^4+1-x^2)(x^2+1-x)(x^2+1+x).$$

b. Ta biến đổi:

$$x^4+6x^3+13x^2+12x+4$$
$$= (x^4+4x^3+4x^2)+(2x^3+8x^2+8x)+(x^2+4x+4)$$
$$= x^2(x^2+4x+4)+2x(x^2+4x+4)+(x^2+4x+4)$$
$$= (x^2+4x+4)(x^2+2x+1) = (x+2)^2(x+1)^2.$$

c. Ta được:

$$x^{11}+x^{10}+\ldots+x^2+x+1$$
$$= (x+1)(x^2+1)(x^4-x^2+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1).$$

d. Ta được:

$$(x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y)+y^4 = (x^2+5xy+5y^2)^2.$$

Bài tập 8.

a. Ta có $x^3 - x^2 - x + 1 = (x+1)(x-1)^2$

nên phương trình có nghiệm $x = \pm 1$.

b. Ta có $x^4 + 2x^3 - 6x - 9 = (x^2-3)(x^2+2x+3)$.

nên phương trình có nghiệm $x = \pm\sqrt{3}$.

Bài tập 9. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 10. Ta biến đổi:

$$n^3 - n = n(n^2-1) = n(n-1)(n+1).$$

Nhận xét rằng $n-1$, n, $n+1$ là ba số tự nhiên liên tiếp, do đó sẽ có ít nhất một số chẵn (chia hết cho 2) và một số chia hết cho 3.

Vậy, $n^3 - n$ chia hết cho 6 với mọi số nguyên n.

Bài tập 11.

a. $A = (y-z)(x-z)(x-y)(x+z+y)$.

b. Với x, y, z là ba số tự nhiên liên tiếp có tổng bằng 36, ta được:

$x + y + z = 36$,

$x - y = -1$,

$y - z = -1$,

$x - z = -2$,

do đó $A = -1.(-2)(-1).36 = -72$.

CHỦ ĐỀ 4 CHIA ĐA THỨC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Trước tiên chúng ta cần biết:

"Với hai đa thức A và B ≠ 0, ta nói rằng A chia hết cho B nếu tìm được một đa thức C sao cho A = B.C"

Trong đó, A được gọi là đa thức bị chia, B được gọi là đa thức chia và Q được gọi là đa thức thương, kí hiệu:

$$Q = A : B \text{ hoặc } Q = \frac{A}{B}.$$

Ở đây, chúng ta sẽ sử dụng kết quả đã biết trong chương trình lớp 7 là:

$$x^m : x^n = x^{m-n},\ \forall x \neq 0,\ m, n \in \mathbf{N},\ m \geq n$$

và dễ thấy kết quả trên sẽ được mở rộng tự nhiên cho đa thức A như sau:

$$A^m : A^n = A^{m-n},\ \forall A \neq 0,\ m, n \in \mathbf{N},\ m \geq n$$

1. CHIA ĐƠN THỨC CHO ĐƠN THỨC

Ta bắt đầu với phép chia đơn thức $15x^3y^2$ cho đơn thức $3xy^2$, như sau:

$$15x^3y^2 : 3xy^2 = \frac{15}{3}.\frac{x^3}{x}.\frac{y^2}{y^2} = 5x^2.$$

→ Chia hệ số cho hệ số

→ Chia y^2 cho y^2

→ Chia x^3 cho x

Quy tắc: ***Muốn chia đơn thức A cho đơn thức B*** *(trường hợp A chia hết cho B) ta thực hiện như sau:*

- Chia hệ số của đơn thức A cho hệ số của đơn thức B.
- Chia mỗi luỹ thừa trong A cho luỹ thừa của cùng một biến trong B.
- Nhân các kết quả tìm được với nhau.

Thí dụ 1: Thực hiện phép chia:

a. $10x^3y^2z : (-4xy^2z)$.

b. $\frac{3}{2}x^2y^3z^4 : \frac{1}{4}y^2z$.

c. $(x^2 + x + 1)^8 : (x^2 + x + 1)^3$.

Giải

a. Ta có:

$$10x^3y^2z : (-4xy^2z) = \frac{10}{-4}.\frac{x^3}{x}.\frac{y^2}{y^2}.\frac{z}{z} = -\frac{5}{2}x^2.$$

b. Ta có:

$$\frac{3}{2}x^2y^3z^4 : \frac{1}{4}y^2z = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{4}} \cdot \frac{x^2}{1} \cdot \frac{y^3}{y^2} \cdot \frac{z^4}{z} = 6x^2yz^3.$$

Chú ý: Khi đã thành thạo quy tắc chia đơn thức cho đơn thức chúng ta có thể bỏ một số phép tính trung gian, chẳng hạn:

$$\frac{3xy^3z^4}{-2xy^2} = -\frac{3}{2}yz^4.$$

c. Ta có:

$$(x^2+x+1)^8 : (x^2+x+1)^3 = (x^2+x+1)^{8-3}$$
$$= (x^2+x+1)^5.$$

2. CHIA ĐA THỨC CHO ĐƠN THỨC

Ta bắt đầu với phép chia đa thức $3x^3 + 15x^2y - 9xy^3$ cho đơn thức $3x$, như sau:

Chia mỗi hạng tử của đa thức $3x^3 + 15x^2y - 9xy^3$ cho đơn thức $3x$ — Cộng các kết quả với nhau

$$(3x^3 + 15x^2y - 9xy^3) : 3x = \underbrace{\frac{3x^3}{3x} + \frac{15x^2y}{3x} - \frac{9xy^3}{3x}} = \underbrace{x^2 + 5xy - 3y^3}.$$

Quy tắc: ***Muốn chia đa thức A cho đơn thức B** (trường hợp các hạng tử của A chia hết cho B) ta chia mỗi hạng tử của A cho B rồi cộng các kết quả với nhau.*

Thí dụ 2: Thực hiện phép chia:

a. $(4x^3 - 3x^2y + 5xy^2) : \frac{1}{3}x$.

b. $[2(y-x)^3 - 2(y-x)^2 + (x-y)] : (y-x)$.

Giải

a. Ta có:

$$(4x^3 - 3x^2y + 5xy^2) : \frac{1}{3}x = 12x^2 - 9xy + 15y^2.$$

b. Ta viết lại :

$$[2(y-x)^3 - 2(y-x)^2 - (y-x)] : (y-x) = 2(y-x)^2 - 2(x-y) - 1.$$

3. CHIA ĐA THỨC MỘT BIẾN ĐÃ SẮP XẾP

3.1. Phép chia hết

Để minh hoạ quy tắc" *Chia hai đa thức một biến đã sắp xếp* ", chúng ta sử dụng mẫu:

Đa thức bị chia	Đa thức chia
	Thương số

và bắt đầu với phép chia đa thức $P = 3x^2 - 5x - 2$ cho đa thức $Q = 3x+1$, ta thực hiện theo thứ tự các bước 1, 2, 3, 4, 5, 6 như sau:

(1) Lấy $3x^2$ chia cho $3x$ nhận được x.

(4) Lấy $-6x$ chia cho $3x$ nhận được -2.

$$
\begin{array}{rr|l}
(3) & 3x^2 - 5x - 2 & 3x + 1 \\
 & -\ 3x^2 + x & \overline{x - 2} \\
\hline
(6) & -6x - 2 & \\
 & -\ -6x - 2 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}
$$

(2) Lấy x nhân với đa thức chia $3x + 1$ nhận được $3x^2 + x$

(5) Lấy -2 nhân với đa thức chia $3x + 1$ nhận được $-6x - 2$

Nhận thấy, số dư cuối cùng bằng 0, do đó đây là phép chia hết và ta được:

$$(3x^2 - 5x - 2) : (3x + 1) = x - 2.$$

Quy tắc: ***Muốn chia đa thức A cho đa thức B*** *(trường hợp A và B là các đa thức một biến đã được sắp xếp và A chia hết cho B) ta thực hiện như sau:*

Bước 1: Đặt phép chia.

Bước 2: Chia hạng tử bậc cao nhất của đa thức bị chia cho hạng tử bậc cao nhất của đa thức chia, giả sử nhận được thương là C_1.

Bước 3: Lấy C_1 nhân với đa thức chia, kết quả nhận được viết dưới đa thức bị chia. Thực hiện phép trừ hai đa thức này để nhận được số dư.

Bước 4: Đặt vai trò số dư là số bị chia, ta quay trở lại bước 2 cho tới khi nhận được số dư bằng 0.

Thí dụ 3: Thực hiện các phép chia:

a. $(x^3 + 4x^2 + 6x + 4) : (x + 2)$.

b. $(x^4 + x^2 + 1) : (x^2 - x + 1)$.

Giải

a. Ta có:

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 + 4x^2 + 6x + 4 & x + 2 \\
-\ x^3 + 2x^2 \qquad\qquad & \overline{x^2 + 2x + 2} \\
\hline
2x^2 + 6x + 4 & \\
-\ 2x^2 + 4x \quad\ \ & \\
\hline
2x + 4 & \\
-\ 2x + 4 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Vậy, ta được:

$$(x^3 + 4x^2 + 6x + 4) : (x + 2) = x^2 + 2x + 2.$$

b. Ta có:

$$\begin{array}{l|l} x^4 + x^2 + 1 & x^2 - x + 1 \\ x^4 - x^3 + x^2 & x^2 + x + 1 \\ \quad x^3 + 1 & \\ \quad x^3 - x^2 + x & \\ \qquad x^2 - x + 1 & \\ \qquad x^2 - x + 1 & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

Vậy, ta được $(x^4 + x^2 + 1) : (x^2 - x + 1) = x^2 + x + 1$.

3.2. Phép chia có dư

Trong trường hợp số dư nhận được là một đa thức khác 0 có bậc nhỏ hơn đa thức chia, ta khẳng định phép chia đó là phép chia có dư.

Thí dụ 4: Thực hiện các phép chia:

$$(2x^3 - 3x^2 - 3) : (x^2 - 1).$$

Giải

Ta có:

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 - 3x^2 \qquad - 3 & x^2 - 1 \\ 2x^3 \qquad\quad - 2x & 2x - 3 \\ \quad - 3x^2 + 2x - 3 & \\ \quad - 3x^2 \qquad + 3 & \\ \qquad\qquad 2x - 6 & \end{array}$$

tới đây, phép chia không thể tiếp tục, vì bậc của số dư thấp hơn bậc của số chia.

Vậy ta nhận được:

$$(2x^3 - 3x^2 - 3) = (x^2 - 1)(2x - 3) + 2x - 6.$$

Chú ý: Người ta chứng minh được rằng, đối với hai đa thức của cùng một biến tuỳ ý A và B, $B \neq 0$, tồn tại hai đa thức duy nhất Q và R sao cho :

$$A = B.Q + R,$$

với R = 0 hoặc bậc của R nhỏ hơn bậc của B.

- Với R = 0, ta nói A chia hết cho B.
- Với $R \neq 0$, ta nói A không chia hết cho B (phép chia có dư).

II. CÁC VÍ DỤ SỬ DỤNG PHÉP CHIA ĐA THỨC

Ví dụ 1: Thực hiện các phép chia:

a. $5x^3y^2z : (-2xy^2z)$.

b. $(3x^2y + 8xy^2 - 4x^2y^2) : (-xy)$.

c. $(2x - 4y)^3 : 2(2y - x)$

d. $[3(x - y)^3 - 6(y - x)^2 + (x - y)] : (y - x)$.

Giải

a. Ta có:

$5x^3y^2z : (-2xy^2z) = -\frac{5}{2}x^2.$

b. Ta có:

$$(3x^2y + 8xy^2 - 4x^3y^5) : (-xy) = -3x - 8y + 4x^2y^4.$$

c. Viết lại đa thức $(2x - 4y)^3$ dưới dạng:

$$(2x - 4y)^3 = [-2(2y - x)]^3 = -8(2y - x)^3.$$

Khi đó, phép chia có dạng:

$$-8(2y - x)^3 : 2(2y - x) = -4(2y - x).$$

d. Ta có:

$$[3(x - y)^3 - 6(y - x)^2 + (x - y)] : (y - x) = -3(x - y)^2 - 6(y - x) - 1.$$

Ví dụ 2: Tính giá trị của các biểu thức:

$$P = x^{3n} : x^{3n-2}, \text{ với } n \geq 1 \text{ và } x = -1/8.$$

Giải

Với $n \geq 1$, ta có:

$$P = x^{3n} : x^{3n-2} = x^{3n-(3n-2)} = x^2 = \left(-\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{64}.$$

Ví dụ 3: Tìm x, biết:

$$(2ax^3 - 3ax^2) : ax^2 = 5, \text{ với a là hằng số khác 0.}$$

Giải

Ta có:

$$(2ax^3 - 3ax^2) : ax^2 = 2x - 3,$$

từ đó ta nhận được:

$$2x - 3 = 5 \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4.$$

Vậy, với $x = 4$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 4: Tìm số tự nhiên n để mỗi phép chia sau là phép chia hết:

a. $x^4 : x^{2n}$.

b. $x^n : x^3$.

c. $x^ny^3 : x^2y^{n+1}$.

d. $(x^3y^n + 8x^2y^2 + 9xy^{n+1}) : x^ny$.

Giải

a. **Để phép chia $x^4 : x^{2n}$ là phép chia hết điều kiện là:**

$$4 \geq 2n \Leftrightarrow 2 \geq n.$$

Vậy, điều kiện là $n \in N$ và $n < 2$ (cụ thể, ta nhận được $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$).

b. **Để phép chia $x^n : x^3$ là phép chia hết điều kiện là $n \geq 3$**

Vậy, điều kiện là $n \in N$ và $n \geq 3$ (cụ thể, ta nhận được $n = 3, 4, 5, \ldots$).

c. **Để phép chia $x^ny^3 : x^2y^{n+1}$ là phép chia hết điều kiện là:**

$$\begin{cases} n \geq 2 \\ 3 \geq n + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \geq 2 \\ n \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow n = 2.$$

Vậy, điều kiện là $n = 2$.

d. **Để phép chia $(x^3y^n + 8x^2y^2 + 9xy^{n+1}) : x^ny$ là phép chia hết điều kiện là:**

$$\begin{cases} 3 \ge n \text{ và } n \ge 1 \\ 2 \ge n \text{ và } 2 \ge 1 \\ 1 \ge n \text{ và } n + 1 \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow n = 1.$$

Vậy, điều kiện là $n = 1$.

Ví dụ 5: Thực hiện các phép chia:

a. $(x^3 - 3x^2 + x - 3) : (x - 3)$.

b. $(2x^2 - 5x^3 + 2x + 2x^4 - 1) : (x^2 - x - 1)$.

Giải

a. Ta có:

$$\begin{array}{rl|l}
 & x^3 - 3x^2 + x - 3 & x - 3 \\ \cline{3-3}
- & x^3 - 3x^2 & x^2 + 1 \\ \hline
- & x - 3 & \\
 & x - 3 & \\ \hline
 & 0 &
\end{array}$$

Vậy, ta được:

$$(x^3 - 3x^2 + x - 3) : (x - 3) = x^2 + 1.$$

b. Viết lại đa thức $2x^2 - 5x^3 + 2x + 2x^4 - 1$ dưới dạng:

$$2x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 2x - 1.$$

Ta có:

$$\begin{array}{rl|l}
 & 2x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 2x - 1 & x^2 - x - 1 \\ \cline{3-3}
- & 2x^4 - 2x^3 - 2x^2 & 2x^2 - 3x + 1 \\ \hline
- & -3x^3 + 4x^2 + 2x - 1 & \\
 & -3x^3 + 3x^2 + 3x & \\ \hline
- & x^2 - x - 1 & \\
 & x^2 - x - 1 & \\ \hline
 & 0 &
\end{array}$$

Vậy, ta được:

$$(2x^2 - 5x^3 + 2x + 2x^4 - 1) : (x^2 - x - 1) = 2x^2 - 3x + 1.$$

Ví dụ 6: Tìm thương Q và dư R sao cho $A = B.Q + R$, biết:

a. $A = x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x - 4$ và $B = x^2 - 2x + 3$.

b. $A = x^3 + x + 1$ và $B = x^2 + x + 1$.

Giải

a. Ta có:

$$\begin{array}{rl|l}
- & x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x - 4 & x^2 - 2x + 3 \\ \cline{3-3}
 & x^4 - 2x^3 + 3x^2 & x^2 + 5x + 9 \\ \hline
- & 5x^3 - x^2 - x - 4 & \\
 & 5x^3 - 10x^2 + 15x & \\ \hline
- & 9x^2 - 16x - 4 & \\
 & 9x^2 - 18x + 27 & \\ \hline
 & 2x - 31 &
\end{array}$$

Vậy, ta được:

$$Q = x^2 + 5x + 9 \text{ và } R = 2x - 31$$

do đó:

$$x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x - 4 = (x^2 - 2x + 3)(x^2 + 5x + 9) + 2x - 31$$

b. Ta có:

$x^3 \quad\quad + x + 1$	$x^2 + x + 1$
$-\; x^3 + x^2 + x$	$x - 1$
$\quad - x^2 \quad + 1$	
$-\; - x^2 - x - 1$	
$\quad\quad x + 2$	

Vậy, ta được $Q = x - 1$ và $R = x + 2$ do đó:

$$x^3 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(x - 1) + x + 2.$$

Ví dụ 7: Tìm giá trị nguyên của n để giá trị của biểu thức $4n^3 - 4n^2 - n + 4$ chia hết cho giá trị của biểu thức $2n + 1$.

Giải

Thực hiện phép chia $4n^3 - 4n^2 - n + 4$ cho $2n + 1$, ta được:

$$4n^3 - 4n^2 - n + 1 = (2n + 1)(n^2 + 1) + 3.$$

Từ đó, để có phép chia hết điều kiện là $3 \vdots 2n + 1$, tức là cần tìm giá trị nguyên của n để $2n + 1$ là ước của 3, ta được:

$$2n + 1 = 3 \Leftrightarrow n = 1,$$

$$2n + 1 = -3 \Leftrightarrow n = -2,$$

$$2n + 1 = 1 \Leftrightarrow n = 0,$$

$$2n + 1 = -1 \Leftrightarrow n = -1.$$

Vậy, với $n = \pm 1$, $n = 0$, $n = -2$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 8: Tìm m sao cho đa thức $x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 7x + m$ chia hết cho đa thức $x^2 - 2x + 1$.

Giải

Thực hiện phép chia đa thức $x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 7x + m$ cho đa thức $x^2 - 2x + 1$, ta được:

$$x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 7x + m = (x^2 - 2x + 1)(x^2 - x + 3) + m - 3$$

Từ đó, để $x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 7x + m$ chia hết cho $x^2 - 2x + 1$ điều kiện là:

$$m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = 3.$$

Vậy, với $m = 3$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Nhận xét: Trong lời giải trên, việc tìm điều kiện của tham số để đa thức A chia hết cho đa thức B được thực hiện theo các bước:

Bước 1: Thực hiện phép chia A cho B để có được phần dư R.

Bước 2: Tìm điều kiện để R = 0.

Cách làm này rất đúng, chỉ có điều trong những trường hợp riêng việc thực hiện bước 1 là rất phức tạp, và chúng ta hoàn toàn có thể khắc phục được vấn đề này thông

qua kết quả của định lí:

"*Số dư của phép chia đa thức f(x) cho x - a là f(a)*".

Các ví dụ tiếp theo ở chủ đề này sẽ minh hoạ việc sử dụng định lí này.

Ví dụ 9; Cho $f(x) = 4x^2 - 6x + m$.

a. Không thực hiện phép chia, hãy tìm phần dư của phép chia f(x) cho x - 3.

b. Tìm m để f(x) chia hết cho x - 3.

Giải

a. Ta có, phần dư của phép chia f(x) cho x - 3 là:

$f(3) = m + 18$.

b. Để f(x) chia hết cho x - 3 điều kiện là

$m + 18 = 0 \Leftrightarrow m = -18$.

Vậy, với m = - 18 thoả mãn điều kiện đầu bài.

Nhận xét: Như vậy, thông qua ví dụ trên chúng ta đã bước đầu biết cách vận dụng định lí về phần dư. Ví dụ tiếp theo sẽ gồm 2 câu, với mục đích:

- Câu a) giúp ôn tập lại việc sử dụng định lí để tìm phần dư.
- Câu b) minh hoạ việc vận dụng sáng tạo hơn và người ta đặt tên cho phương pháp ở đây là "*Phương pháp giá trị riêng*".

Ví dụ 10: Cho $f(x) = x^{27} + x^9 + x^3 + x$.

Không thực hiện phép chia, hãy tìm phần dư của phép chia f(x) cho:

a. x - 1.   b. $x^2 - 1$.

Giải

a. Ta có, phần dư của phép chia f(x) cho x - 1 là:

$f(1) = 4$.

b. Giả sử phép chia f(x) cho $x^2 - 1$ có phần dư là ax + b, khi đó:

$f(x) = (x^2 - 1).q(x) + ax + b$, với mọi x

$\Leftrightarrow x^{27} + x^9 + x^3 + x = (x^2 - 1).q(x) + ax + b$, với mọi x. (1)

Chọn các giá trị riêng của x sao cho:

$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$, ta được:

- Với x = 1 thì:

$(1) \Leftrightarrow 4 = a + b$. (2)

- Với x = - 1 thì:

$(1) \Leftrightarrow -4 = -a + b$. (3)

Từ (2), (3) ta nhận được a = 4 và b = 0.

Vậy, phần dư của phép chia f(x) cho $x^2 - 1$ là 4x.

Nhận xét: 1. Trong lời giải trên ta có được đẳng thức:

$f(x) = (x^2 - 1).q(x) + ax + b$

là bởi "*Phần dư là một đa thức có bậc nhỏ hơn đa*

thức chia".

2. Như vậy, "*Phương pháp giá trị riêng*" ở đây chính là việc sử dụng các giác trị riêng x sao cho:

   B(x) = 0, với B(x) là số chia.

Ví dụ 11: Tìm a, b sao cho đa thức $f(x) = x^4 + ax + b$ chia hết cho đa thức $x^2 - 4$.

Giải

Giả sử phép chia f(x) cho $x^2 - 4$ có thương q(x), khi đó:

$f(x) = (x^2 - 4).q(x)$, với mọi x

$\Leftrightarrow x^4 + ax + b = (x^2 - 4).q(x)$, với mọi x. (1)

Chọn các giá trị riêng của x sao cho:

$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$, ta được:

- Với x = 2 thì:

  (1) $\Leftrightarrow 16 + 2a + b = 0$. (2)

- Với x = - 2 thì:

  (1) $\Leftrightarrow 16 - 2a + b = 0$. (3)

Từ (2), (3) ta nhận được a = 0 và b = - 16.

Vậy, với a = 0, b = - 16 thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 12: Tìm a, b sao cho đa thức $f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + ax + b$ chia cho đa thức $x^2 - x - 2$ dư $2x - 3$.

Giải

Với giả thiết phép chia f(x) cho $x^2 - x - 2$ dư $2x - 3$, khi đó:

$f(x) = (x^2 - x - 2).q(x) + 2x - 3$, với mọi x

$\Leftrightarrow x^4 - x^3 - 3x^2 + ax + b = (x^2 - x - 2).q(x) + 2x - 3$, với mọi x. (1)

Chọn các giá trị riêng của x sao cho:

$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 2$.

Ta được:

- Với x = - 1 thì:

  (1) $\Leftrightarrow -1 - a + b = -5$. (2)

- Với x = 2 thì:

  (1) $\Leftrightarrow -4 + 2a + b = 1$. (3)

Từ (2), (3) ta nhận được a = 3 và b = - 1.

Vậy, với a = 3, b = - 1 thoả mãn điều kiện đầu bài.

Nhận xét: Chúng ta tiếp tục mở rộng cho trường hợp nhiều biếm . Khi đó, giá trị riêng được lựa chọn thoe nghĩa tuỳ ý có chủ định, bởi phương trình nhiều ẩn thường có vô số nghiệm, thí dụ:

$x + y = 0 \Rightarrow$ có thể chọn được vô số cặp (x, y).

Ví dụ 13: Tìm m sao cho đa thức $f(x) = x^3 + y^3 + z^3 + mxyz$ chia hết cho đa thức x + y + z.

Giải

Giả sử phép chia f(x) cho x + y + z có thương q, khi đó:

$f(x) = (x + y + z).q$, với mọi x, y, z

$\Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 + mxyz = (x + y + z).q$, với mọi x. (1)

Chọn các giá trị riêng của x, y, z sao cho:

$x + y + z = 0 \Rightarrow x = 1, y = 1, z = -2$.

Ta được:

- Với x = 1, y = 1, z = - 2 thì:

  $(1) \Leftrightarrow 1 + 1 - 8 - 2m = 0 \Leftrightarrow m = -3$

- Thử lại, với m = - 3, ta được:

  $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$.

Vậy, với m = - 3 thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 14: Tìm đa thức f(x), biết f(x) chia cho x + 4 dư 9, f(x) chia cho x - 3 dư 2 và f(x) chia cho $x^2 + x - 12$ có thương bằng $x^2 + 3$ và có dư.

Giải

Với giả thiết f(x) chia cho $x^2 + x - 12$ có thương bằng $x^2 + 3$ và có dư, ta nhận được:

$f(x) = (x^2 + x - 12)(x^2 + 3) + ax + b$. (1)

Chọn các giá trị riêng của x sao cho:

$x^2 + x - 12 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ hoặc $x = -4$.

Khi đó:

- Với giả thiết f(x) chia cho x + 4 dư 9, ta được:

  $f(-4) = 9 \Leftrightarrow -4a + b = 9$. (2)

- Với giả thiết f(x) chia cho x - 3 dư 2, ta được:

  $f(3) = 2 \Leftrightarrow 3a + b = 2$. (2)

Từ (2), (3) ta nhận được a = - 1 và b = 5.

Suy ra:

$f(x) = (x^2 + x - 12)(x^2 + 3) - x + 5 = x^4 + x^3 - 9x^2 + 2x - 31$.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Viết dạng tổng quát của phép chia hai luỹ thừa cùng cơ số.

Câu hỏi 2: Phát biểu quy tắc chia đơn thức cho đơn thức và cho ví dụ.

Câu hỏi 3: Phát biểu quy tắc chia đa thức cho đơn thức và cho ví dụ.

Câu hỏi 4: Phát biểu quy tắc chia đa thức A cho đa thức B (trường hợp A và B là các đa thức một biến đã được sắp xếp).

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Rút gọn biểu thức:

a. $\dfrac{3^{2}.5^{3}}{25^{2}}$.

b. $\dfrac{2^{3}.2^{6}.3^{8}.9^{2}}{4^{3}.3^{11}}$.

c. $\dfrac{3.9^{4} - 9^{3}}{3^{3}.9}$.

d. $\dfrac{125.5^{5}.64 - 25^{3}.10.4}{5^{7}.8}$.

Bài tập 2. Thực hiện các phép chia:

a. $15xy^{2}z^{3} : (-3xyz^{2})$.

b. $(12x^{5}y^{4}) : (-4x^{4}y^{2})$.

c. $(-15x^{3}y^{3}z^{2}) : (-6xz^{2})$.

d. $(x - y)^{5} : (y - x)^{3}$.

e. $(x - y)^{5} : (y - x)^{2}$.

f. $(3y - 6x)^{3} : 9(2x - y)$.

Bài tập 3. Thực hiện các phép chia:

a. $(4x^{5} - 8x^{3}) : (-2x^{3})$.

b. $(9x^{3} - 12x^{2} + 3x) : (-3x)$.

c. $(xy^{2} + 4x^{2}y^{3} - 3x^{3}y^{4}) : (-2xy^{2})$.

d. $(-3x^{2}y^{3} + 4x^{3}y^{4} - x^{4}y^{5}) : \left(-\dfrac{1}{2}x^{2}y^{3}\right)$.

e. $[2(x - y)^{3} - 7(y - x)^{2} - (y - x)] : (x - y)$.

f. $[3(x - y)^{5} - 2(x - y)^{4} + 3(x - y)^{2}] : [5(x - y)^{2}]$.

Bài tập 4. Tìm thương:

a. $(x^{4} + 8x^{2} + 16) : (x^{2} + 4)$.

b. $(25 - x^{2}) : (x + 5)$.

c. $(x^{3} + 1) : (x^{2} - x + 1)$.

Bài tập 5. Thực hiện các phép chia:

a. $(2x^{3} - 5x^{2} - x + 1) : (2x + 1)$.

b. $(x^{3} - 2x + 4) : (x + 2)$.

c. $(6x^{3} - 19x^{2} + 23x - 12) : (2x - 3)$.

d. $(x^{4} - 2x^{3} - 1 + 2x) : (x^{2} - 1)$.

e. $(6x^{3} - 5x^{2} + 4x - 1) : (2x^{2} - x + 1)$.

f. $(x^{4} - 5x^{2} + 4) : (x^{2} - 3x + 2)$.

Bài tập 6. Thực hiện các phép chia:

a. $(x^{3} - 3x + 2) : (x - 1)^{2}$.

b. $(3x^{4} - 4x^{3} + 1) : (x - 1)^{2}$.

Bài tập 7. Sắp xếp các đa thức sau theo luỹ thừa giảm của biến rồi thực hiện phép chia:

a. $(4x^{2} - 4x^{3} - 4x + 3x^{4} + 1) : (1 - 4x + 3x^{2})$.

b. $(9 + x^{4} - 10x^{2}) : (4x + 3 + x^{2})$.

Bài tập 8. Sắp xếp các đa thức sau theo luỹ thừa giảm của một biến rồi thực hiện phép chia:

$$(x^{4} - x^{3}y + x^{2}y^{2} - xy^{3}) : (x^{2} + y^{2}).$$

Bài tập 9. Tìm số tự nhiên n để mỗi phép chia sau là phép chia hết:

a. $x^{5} : x^{3n}$.

b. $x^{n} : x^{8}$.

d. $(5x^{n-2}y^{3}) : (3xy^{n})$.

e. $(3x^{n-1}y^{5}) : (-2x^{2}y^{n+1})$.

c. $x^{n+1}y^2 : x^3y^{n-1}$.

Bài tập 10. Tìm số tự nhiên n để mỗi phép chia sau là phép chia hết:

a. $(4x^{n-1} - 5x^3) : (2x^3)$.

b. $(2x^3 - 5x^2 + x) : 3x^n$.

c. $(x^4y^3 + 3x^3y^2 + x^2y^n) : 4x^ny^2$.

Bài tập 11. Tính giá trị của các biểu thức:

a. $A = 3\left(\frac{2x}{3} - 1\right) + (15x^2 - 10x) : (-5x) - (3x - 1)$, với $x = -\frac{2}{3}$.

b. $B = x^{3n} : x^{2n+3}$, với $n > 2$ và $x = -3$.

Bài tập 12. Tìm thương Q và dư R sao cho A = B.Q + R, biết:

a. $A = 2x^3 - 3x^2 + 6x - 4$ và $B = x^2 - x + 3$.

b. $A = 2x^4 + x^3 + 3x^2 + 4x + 9$ và $B = x^2 + 1$.

c. $A = 2x^3 - 11x^2 + 19x - 6$ và $B = x^2 - 3x + 1$.

d. $A = 2x^4 - x^3 - x^2 - x + 1$ và $B = x^2 + 1$.

Bài tập 13. Tìm đa thức bị chia biết đa thức chia là $x^2 - x + 1$, thương là $x + 1$, dư là $2x - 1$.

Bài tập 14. Tìm số dư của phép chia đa thức $x^3 - 3x^2 + 4x - 5$ cho đa thức $x - 2$ bằng cách:

a. Đặt phép chia đa thức;

b. Không đặt phép chia đa thức.

Bài tập 15. Chứng minh rằng:

a. $x^{50} + x^{10} + 1$ chia hết cho $x^{20} + x^{10} + 1$.

b. $x^{6n+1} + x^{6m+2} + 1$ chia hết cho $x^2 - x + 1$ với mọi $n, m \in \mathbb{N}$.

Bài tập 16. Tìm m sao cho đa thức A chia hết cho đa thức B, biết:

a. $A = 8x^2 - 26x + m$ và $B = 2x - 3$.

b. $A = x^3 + 4x^2 + 4x + m$ và $B = x + 3$.

c. $A = x^3 - 13x + m$ và $B = x^2 + 4x + 3$.

d. $A = x^4 + 5x^3 - x^2 - 17x + m + 4$ và $B = x^2 + 2x - 3$.

e. $A = 2x^4 + mx^3 - mx - 2$ và $B = x^2 - 1$.

Bài tập 17. Tìm x biết:

a. $(8x^2 - 4x) : (-4x) - (x + 2) = 8$.

b. $(2x^4 - 3x^3 + x^2) : \left(-\frac{1}{2}x^2\right) + 4(x - 1)^2 = 0$.

Bài tập 18. Tìm x, biết:

$(3ax^3 - 2ax) : ax = 22$, với a là hằng số khác 0.

Bài tập 19. Tìm giá trị nguyên của n để giá trị của biểu thức A chia hết cho giá trị của biểu thức B, biết:

a. $A = 8n^2 - 4n + 1$ và $B = 2n + 1$.

b. $A = 3n^3 + 8n^2 - 15n + 6$ và $B = 3n - 1$.

c. $A = 4n^3 - 2n^2 - 6n + 5$ và $B = 2n - 1$.

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 4.

a. $x^2 + 4$.

b. $5 - x$.

c. $x + 1$.

Bài tập 5.

a. $x^2 - 3x + 1$.

b. $x^2 - 2x + 2$.

c. $3x^2 - 5x + 4$.

d. $x^2 - 2x + 1$.

e. $3x - 1$.

f. $x^2 + 3x + 2$.

Bài tập 6.

a. $x + 2$.

b. $3x^2 + 2x + 1$.

Bài tập 7.

a. $x^2 + 1$.

b. $x^2 - 4x + 3$.

Bài tập 8. $x^2 - xy$.

Bài tập 9. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 10. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 11. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 12.

a. $2x^3 - 3x^2 + 6x - 4 = (x^2 - x + 3)(2x - 1) - x - 1$.

b. $2x^4 + x^3 + 3x^2 + 4x + 9 = (x^2 + 1)(2x^2 + x + 1) + 3x + 8$.

c. $2x^3 - 11x^2 + 19x - 6 = (x^2 - 3x + 1)(2x - 1) + 2x - 5$.

d. $2x^4 - x^3 - x^2 - x + 1 = (x^2 + 1)(2x^2 - 4x - 3) + 4$.

Bài tập 13. $x^3 + 2x$.

Bài tập 14. -1.

Bài tập 15. Nhận xét rằng, nếu thực hiện phép chia đa thức thì bài toán này quá phức tạp, do đó chúng ta thực hiện như sau:

a. Ta biến đổi:

$$x^{50} + x^{10} + 1 = x^{50} - x^{20} + x^{20} + x^{10} + 1$$
$$= x^{20}(x^{30} - 1) + x^{20} + x^{10} + 1$$
$$= x^{20}(x^{10} - 1)(x^{20} + x^{10} + 1) + x^{20} + x^{10} + 1$$

do đó, nó chia hết cho $x^{20} + x^{10} + 1$.

b. Ta biến đổi:

$$x^{6n+4} + x^{6m+2} + 1 = x^{6n+4} - x^4 + x^4 + x^{6m+2} - x^2 + x^2 + 1$$
$$= x^4(x^{6n} - 1) + x^2(x^{6m} - 1) + x^4 + x^2 + 1$$

Nhận xét rằng:

$$x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 - x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 - x^2$$
$$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$$

$\Rightarrow x^4 + x^2 + 1$ chia hết cho $x^2 - x + 1$.

$x^{6n} - 1$ và $x^{6m} - 1$ đều chia hết cho $x^6 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 - x + 1)$

$\Rightarrow x^{6n} - 1$ và $x^{6m} - 1$ chia hết cho $x^2 - x + 1$.

Vậy, luôn có $x^{6n+4} + x^{6m+2} + 1$ chia hết cho $x^2 - x + 1$.

ÔN TẬP CHƯƠNG I

Bài tập 1. Làm tính nhân:

a. $5x(x^2 - 8x + 19)$.

b. $\frac{4}{5}xy(x^2y + 15x - 25y)$.

c. $(2x^2 - 1)(x^2 + 2x + 3)$

d. $(3x + 5y)(x^2 - 4xy + y)$

e. $(2x + 3)(3x - 2)(4x + 5)$

Bài tập 2. Tính nhanh giá trị của mỗi biểu thức:

a. $A = 2,5^2 + 6 . 2,5 . 8,9 + 8,9^2$.

b. $B = 2^4.3^4 - (6^2 + 1)(6^2 - 1)$.

c. $C = x^4 - 12x^3 + 12x^2 - 12x + 111$ tại $x = 11$.

d. $D = 4x^2 + y^4 + 4xy^2$ với $x = 2$ và $y = -4$.

e. $E = x^3 - 27x^2y + 9xy^2 - 27y^3$ tại $x = -3$ và $y = 2$.

Bài tập 3. Rút gọn biểu thức:

a. $(3x - 2)^2 + (3x + 2)^2 - 2(3x - 2)(3x + 2)$.

b. $5(3^2 + 1)(3^4 + 1)(3^6 + 1)(3^8 + 1)$.

c. $(x - 5)(x + 5) - (x + 6)(x - 4)$.

d. $(2x - 1)^2 + (3x + 2)^2 - 2(2x - 1)(3x + 2)$.

Bài tập 4. Thực hiện phép tính:

$$5(2x - 1)^2 + 4(x - 1)(x + 3) - 2(3x - 1)(3x + 1).$$

Bài tập 5. Cho biết $x + y = a$, $xy = b$. Tính theo a và b các biểu thức:

a. $x^2 + y^2$.

b. $x^3 + y^3$.

c. $x^4 + y^4$.

Bài tập 6. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a. $x^3 + 5x^2 + 3x - 9$.

b. $x^3 + x^2 + x - 3$.

c. $x^3 + 6x^2 + 11x\ 6$.

d. $x^3 + 7x + 15x + 9$.

e. $x^3 - 3x^2 + 4$.

f. $x^3 + 2x^2 + 3x + 2$.

g. $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$.

Bài tập 7. Phân tích đa thức thành nhân tử:

a. $x^3 + 5x^2 - 3x - 15$.

b. $(2x + 3y + 4z)^2 - 8x^3 - 27y^3 - 64z^3$.

c. $2x^4 - 9x^2 - 5$.

d. $4x^2 - 9 + (2x + 3)^2$.

e. $2x^3 - x^2 + 6x - 3$.

f. $3x^3 - 4x^2 + 12x - 16$.

Bài tập 8. Tính giá trị của biểu thức

$$A = (x^3 + y^3) - (x^2 + y^2) + 4xy \text{ biết } x + y = 2.$$

Bài tập 9. Chứng minh rằng:

a. $x^2 + 2xy + y^2 + 1 > 0$ với mọi giá trị nào của x và y;

b. $x^2 - x + 1 > 0$ với moi giá trị của x.

Bài tập 10. Tìm giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất của các biểu thức sau:

a. $A = 3x^2 + 8x + 54$.

b. $B = x^2 - 5x + 11$.

c. $C = -x^2 + 4x - 9$.

Bài tập 11. Chứng minh rằng:

a. $4x^4 + 3y^2 - 6xy + 18 > 0$ với mọi số thực x, y.

b. $x - 1 - x^2 < 0$ với mọi số thực x.

Bài tập 12. Cho các đa thức:

$$A = 5x^3 - 6x^2y + 7xy^2 - 13y^3.$$
$$B = 7x^3 + 6x^2y - 7xy^2 + 13y^3.$$

Tính:

$$[A^2 - AB - A - A(A - B + 2)] - [(A + B + 1).B - AB - B^2 + 2B].$$

Bài tập 13. Làm tính chia:

a. $(2x^3 - 5x^2 - 2x - 3) : (x - 3)$.

b. $(5x^3 + 22x^2 - 13x + 10) : (5x^2 - 3x + 2)$.

c. $(x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 8x - 5) : (x - 1)$.

d. $(8x^3 - 2x^2 + x + 2) : (2x + 1)$.

e. $(x^2 - y^2 + 8x + 16) : (x + y + 4)$.

f. $(x^4 - x^3 + x^2 + 3x) : (x^2 - 2x + 3)$.

Bài tập 14. Tìm x, biết:

$$(x + 2)(x^2 - 2x + 4) - x(x - 1)(x + 1) + 3x = 2.$$

Bài tập 15. Rút gọn biểu thức rồi tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$5x^2 - (10x^3 + 15x^2 - 5x) : (-5x) - 3(x - 1).$$

Bài tập 16. Rút gọn biểu thức:

$$[(x^3 - y^3) + 2(x^2 - y^2) - 2(x - y)^2] : (x - y).$$

Bài tập 17. Thực hiện phép tính:

a. $(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) - (2x + 1)(4x^2 - 2x + 1) + 2(4x^2 - 1) - 2(2x + 3)^2$.

b. $(3x + 4)(3x - 5) - (3x - 4)(3x + 5) + (3x + 5)^3 - (x - 1)^3 - 8(x^3 - 8) : (x - 2)$.

Bài tập 18.

a. Chứng minh rằng đa thức $x^3 - 2x^2 + 2x - 1$ chia hết cho đa thức $x - 1$.

b. Cho đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có $a + b + c + d = 0$. Chứng minh rằng đa thức f(x) chia hết cho đa thức $x - 1$.

Bài tập 19.

a. Chứng minh rằng đa thức $x^3 + 2x^2 + 6x + 5$ chia hết cho đa thức $x + 1$.

b. Cho đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có $a - b + c - d = 0$. Chứng minh rằng đa thức $f(x)$ chia hết cho đa thức $x + 1$.

Bài tập 20. Hãy chứng minh quy tắc nhân nhẩm hai số có hai chữ số, trong đó chữ số hàng chục giống nhau, các chữ số hàng đơn vị có tổng bằng 10 (nhân $\overline{ab}.\overline{ac}$ trong đó $b + c = 10$).

Bài tập 21. Chứng minh rằng:

a. Tích của ba số nguyên liên tiếp bao giờ cũng chia hết cho 6.

b. Lập phương của một số nguyên trừ đi chính số đó là một số chia hết cho 6.

Bài tập 22. Tìm x biết:

a. $\frac{8}{9}x(2x^2 - 3) = 0$.

b. $4x + 4\sqrt{2}x^2 + 2x^3 = 0$.

c. $(2x - 3)^2 - (4x^2 - 9) = 0$.

Bài tập 23. Tìm số nguyên n sao cho:

$3n^2 - 5n + 6$ chia hết cho $3n + 2$.

Bài tập 24. Tìm tất cả các giá trị của x, y, z thỏa mãn đẳng thức:

$$(x + y - z)^2 = x^2 + y^2 - z^2.$$

Bài tập 25. Tìm hai số $a, b \in \mathbf{Z}$, sao cho:

$$a + b = a . b$$

Bài tập 26. Cho $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, sao cho:

$$ab + ac + bc = 1$$

Chứng minh rằng:

$$P = (a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) = d^2.$$

CHƯƠNG II - PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

Chương này, bao gồm:

1. **Định nghĩa của phân thức đại số cùng các tính chất của nó**
2. **Rút gọn phân thức**
3. **Quy đồng mẫu thức của nhiều phân thức**
4. **Các phép toán cộng, trừ, nhân, chia các phân thức đại số**
5. **Phương pháp biến đổi đồng nhất các biểu thức hữu tỉ**

CHỦ ĐỀ 1 PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỊNH NGHĨA

Chúng ta đã biết định nghĩa một *phân số* là $\frac{a}{b}$, với a, b $\in$ Z, b $\neq$ 0, từ đó chúng ta cũng nhận được định nghĩa về một *phân thức đại số* như sau:

> *Một phân thức đại số (hay nói gọn là phân thức) là một biểu thức có dạng $\frac{A}{B}$, trong đó A, B là những đa thức và B $\neq$ 0.*
> - *A được gọi là tử thức (tử số), B là mẫu thức (mẫu số).*
> - *Mỗi đa thức được coi là một phân thức với mẫu thức bằng 1.*

Thí dụ 1: Ta có:

- $\frac{3}{x}, \frac{2x}{5}, \frac{x+1}{x-2}, \frac{x^2-3x+1}{2x+1}$, ... là những phân thức.
- 8, 2x - 1, $3x^2$ - 2, ... được coi là những phân thức $\frac{8}{1}, \frac{2x-1}{1}, \frac{3x^2-2}{1}$,...
- $\frac{x+1}{\frac{1}{x}}$ không phải là một phân thức vì $\frac{1}{x}$ không phải là đa thức.

2. HAI PHÂN THỨC BẰNG NHAU

Chúng ta đã biết định nghĩa " *Hai phân số $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$, với a, b, c, d $\in$ Z, b, d$\neq$ 0 được gọi là bằng nhau nếu ad = bc* ", từ đó chúng ta cũng nhận được định nghĩa về hai phân thức bằng nhau như sau:

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Leftrightarrow AD = BC$$

Thí dụ 2: Với hai phân thức $\frac{xy^2}{z^3}$ và $\frac{x^2y^3z^4}{xyz^5}$, ta có:

- $(xy^2).(xyz^5) = x^2y^3z^7$,
- $(z^3).(x^2y^3z^4) = x^2y^3z^7$,

suy ra:

$$\frac{xy^2}{z^3} = \frac{x^2y^3z^4}{xyz^7}.$$

Chú ý: Hai dạng toán thường được đặt ra liên quan tới định nghĩa hai phân thức bằng nhau là:

Dạng 1: *Dùng định nghĩa hai phân thức bằng nhau chứng minh đẳng thức* $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$.

Dạng 2: *Dùng định nghĩa hai phân thức bằng nhau, hãy tìm đa thức thích hợp để điền vào chỗ trống* $\frac{A}{B} = \frac{...}{D}$.

Trước tiên, chúng ta sử dụng thí dụ sau để minh hoạ cho cách trình bày dạng toán 1.

Thí dụ 3: Dùng định nghĩa hai phân thức bằng nhau chứng minh đẳng thức:

$$\frac{x^2 + x}{x^2} = \frac{x + 1}{x}.$$

Giải

Ta có:

$$(x^2 + x)x = x^3 + x^2,$$
$$x^2(x + 1) = x^3 + x^2,$$

suy ra $(x^2 + x)x = x^2(x + 1)$. Do đó:

$$\frac{x^2 + x}{x^2} = \frac{x + 1}{x}$$

Nhận xét: Như vậy, với yêu cầu " *Dùng định nghĩa hai phân thức bằng nhau chứng minh* $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ ", nhiệm vụ của chúng ta là đi chứng minh cho được $AD = BC$, từ đó đưa ra lời kết luận. Chính vì thế chúng ta có thể trình bày lời giải trên ngắn gọn hơn như sau:

Ta có:

$$(x^2 + x)x = x(x + 1)x = x^2(x + 1).$$

Do đó:

$$\frac{x^2 + x}{x^2} = \frac{x + 1}{x}$$

Tiếp theo, chúng ta sử dụng thí dụ sau để minh hoạ cho cách trình bày dạng toán 2.

Thí dụ 4: Dùng định nghĩa hai phân thức bằng nhau, tìm đa thức A trong đẳng thức:

$$\frac{A}{x - 2} = \frac{2x^2 + 4x}{x^2 - 4}.$$

Giải

Theo định nghĩa hai phân thức bằng nhau ta phải có:

$$A(x^2 - 4) = (x - 2)(2x^2 + 4x) \Leftrightarrow A(x - 2)(x + 2) = 2x(x - 2)(x + 2)$$

suy ra $A = 2x$. Vậy, ta được:

$$\frac{2x}{x - 2} = \frac{2x^2 + 4x}{x^2 - 4}$$

3. TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA PHÂN THỨC

Chúng ta đã biết tính chất cơ bản của phân số là " *Giá trị của phân số không đổi nếu nhân (hoặc chia) tử số và mẫu số với cùng một số khác 0* ". đối với phân thức đại số chúng ta cũng có được tính chất cơ bản tương tự như vậy, cụ thể:

1. ***Nếu nhân tử thức và mẫu thức của một phân thức với cùng một đa thức khác 0 thì được một phân thức bằng phân thức đã cho, cụ thể:***

$$\frac{A}{B} = \frac{A.M}{B.M}$$ ***, M là một đa thức khác đa thức 0.***

2. ***Nếu chia tử thức và mẫu thức của một phân thức với cùng một đa thức khác 0 thì được một phân thức bằng phân thức đã cho, cụ thể:***

$$\frac{A}{B} = \frac{A:N}{B:N}$$ ***, N là một nhân tử chung.***

Thí dụ 5: Ta có:

- $\dfrac{2x}{3y} = \dfrac{2x.y^2}{3y.y^2} = \dfrac{2xy^2}{3y^3}$.
- $2x + 1 = \dfrac{2x + 1}{1} = \dfrac{(2x + 1).(2x - 1)}{1(2x - 1)} = \dfrac{4x^2 - 1}{2x - 1}$

Chú ý: Nhờ tính chất cơ bản của phân thức đại số, mọi phân thức với hệ số hữu tỉ đều có thể được viết dưới dạng một phân thức với tử và mẫu là những đa thức với hệ số nguyên.

Thí dụ 6: Ta có:

- $\dfrac{\frac{1}{2}x - 3}{x^2 + 1} = \dfrac{\left(\frac{1}{2}x - 3\right).2}{(x^2 + 1).2} = \dfrac{x - 6}{2x^2 + 2}$.
- $\dfrac{\frac{1}{3}x - \frac{3}{2}}{x + \frac{1}{6}} = \dfrac{\left(\frac{1}{3}x - \frac{3}{2}\right).6}{\left(x + \frac{1}{6}\right).6} = \dfrac{2x - 9}{6x + 1}$.

Chú ý: Nhờ tính chất cơ bản của phân thức, mà việc chứng minh hai phân thức bằng nhau hoặc so sánh các phân thức được dễ dàng hơn nhiều, thí dụ sau minh hoạ điều này.

Thí dụ 7: Hãy so sánh các phân thức sau:

$$\frac{x^2+x}{x^2-1}, \frac{x^2-2x}{x^2-3x+2}, \frac{x}{x-1}$$

Giải

Ta có:

$$\frac{x^2+x}{x^2-1} = \frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x}{x-1},$$

$$\frac{x^2-2x}{x^2-3x+2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x}{x-1}.$$

Do đó, các phân thức đã cho là bằng nhau.

Thí dụ 8: Dùng tính chất cơ bản của phân thức điền đa thức thích hợp vào chỗ trống trong các đẳng thức sau:

a. $\frac{x^2+2x}{x^2-4} = \frac{x}{\ldots}$.

b. $\frac{x+1}{x-1} = \frac{x^2+x}{\ldots}$.

Giải

a. Biến đổi phân thức ở vế trái, ta được:

$$\frac{x^2+2x}{x^2-4} = \frac{x(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x}{x-2}.$$

Vậy, đa thức cần điền vào là $x - 2$.

b. Ta lần lượt biến đổi các phân thức ở hai vế:

$$\frac{x^2+x}{\ldots} = \frac{x(x+1)}{\ldots}$$

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{x(x+1)}{x(x-1)}$$

Vậy, đa thức cần điền vào là $x(x-1)$.

4. QUY TẮC ĐỔI DẤU

Xuất phát từ tính chất cơ bản của phân thức, với mọi phân thức $\frac{A}{B}$ ta luôn có:

$$\frac{A}{B} = \frac{A(-1)}{B(-1)} = \frac{-A}{-B}$$

từ đó, ta nhận được quy tắc đổi dấu:

> *Nếu đổi dấu cả tử thức và mẫu thức của một phân thức thì được một phân thức bằng phân thức đã cho.*

Thí dụ 9: Ta có:

- $$\frac{2x-1}{3x} = \frac{-(2x-1)}{-(3x)} = \frac{-2x+1}{-3x}.$$
- $$\frac{x-2y}{x-1} = \frac{-(x-2y)}{-(x-1)} = \frac{2y-x}{1-x}.$$

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Chứng minh đẳng thức:

$$\frac{x-2}{-x} = \frac{8-x^3}{x(x^2+2x+4)}.$$

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong ba cách sau:

Cách 1: (*Sử dụng định nghĩa*) Ta có:

$$(x-2)x(x^2+2x+4) = x(x-2)(x^2+2x+4) = x(x^3-8) = x^4-8x,$$
$$-x(8-x^3) = -8x+x^4 = x^4-8x,$$

suy ra $(x-2)x(x^2+2x+4) = -x(8-x^3)$.

Do đó:

$$\frac{x-2}{-x} = \frac{8-x^3}{x(x^2+2x+4)}$$

Cách 2: (*Thực hiện phép nhân cả tử và mẫu của phân thức với một đa thức khác đa thức 0*) Ta có:

$$VT \overset{\text{đổi dấu}}{=} \frac{2-x}{x} \overset{\times(x^2+2x+4)}{=} \frac{(2-x)(x^2+2x+4)}{x(x^2+2x+4)} = \frac{8-x^3}{x(x^2+2x+4)}$$
$$= VP.$$

Cách 3: (*Thực hiện phép chia cả tử và mẫu của phân thức cho một nhân tử chung*) Ta có:

$$VP = \frac{(2-x)(x^2+2x+4)}{x(x^2+2x+4)} \overset{:(x^2+2x+4)}{=} \frac{2-x}{x} \overset{\text{đổi dấu}}{=} \frac{x-2}{-x} = VT.$$

Ví dụ 2: Hãy so sánh các phân thức sau:

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2-x}, \frac{x^2+x-6}{x^2+3x}, \frac{x-2}{x}.$$

Giải

Ta có:

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2-x} = \frac{(x-1)(x-2)}{x(x-1)} = \frac{x-2}{x},$$
$$\frac{x^2+x-6}{x^2+3x} = \frac{(x+3)(x-2)}{x(x+3)} = \frac{x-2}{x}.$$

Do đó, các phân thức trên bằng nhau.

Ví dụ 3: Hãy so sánh các phân thức sau:

$$\frac{-x}{(x-1)^2}, \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Giải

Ta có:

$$\frac{-x}{(x-1)^2} = \frac{-x}{(1-x)^2} \neq \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Vậy, hai phân thức đã cho không bằng nhau.

Chú ý: Để chứng tỏ hai phân thức không bằng nhau, chỉ cần đưa ra một giá trị của biến mà với giá trị đó thì giá trị của hai phân thức khác nhau, cụ thể với x = 2 ta được:

$$\frac{-x}{(x-1)^2} = -2 \text{ và } \frac{x}{(1-x)^2} = 2.$$

Ví dụ 4: Hãy chọn đa thức thích hợp điền vào chỗ trống trong đẳng thức:

$$\frac{\dots}{x^2-5x+4} = \frac{x}{x-4}.$$

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1: (*Sử dụng định nghĩa*):

Giả sử cần điền đa thức A, theo định nghĩa hai phân thức bằng nhau ta phải có:

$A(x - 4) = x(x^2 - 5x + 4)$

$\Leftrightarrow A(x - 4) = x(x - 4)(x - 1)$

suy ra $A = x(x - 1)$.

Vậy, đa thức cần điền vào là $x(x - 1)$.

Cách 2: Ta lần lượt biến đổi các phân thức ở hai vế:

$$VT = \frac{\dots}{x^2-5x+4} = \frac{\dots}{(x-4)(x-1)}$$

$$VP = \frac{x}{x-4} = \frac{x(x-1)}{(x-4)(x-1)}.$$

Vậy, đa thức cần điền vào là $x(x - 1)$.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Phân thức đại số là gì ? Cho ví dụ.

Câu hỏi 2: Phát biểu định nghĩa hai phân thức bằng nhau.

Câu hỏi 3: Phát biểu các tính chất cơ bản của phân thức.

Câu hỏi 4: Phát biểu quy tắc đổi dấu.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Viết các phân thức sau dưới dạng phân thức có tử và mẫu là các đa thức với hệ số nguyên:

a. $\dfrac{\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}}{2x^2 - \frac{1}{2}}$. b. $\dfrac{\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}}{x^2 - \frac{1}{6}}$.

Bài tập 2. Áp dụng quy tắc đổi dấu để viết các phân thức bằng các phân thức sau:

a. $\dfrac{x - y}{3}$. c. $\dfrac{xy}{y - x}$.

b. $\dfrac{5}{y^2 - x^2}$. d. $\dfrac{x(x + 1)}{-x - 2y}$.

Bài tập 3. Viết các phân thức sau dưới dạng phân thức có mẫu thức giống nhau:

a. $\dfrac{2}{x^2y}$ và $\dfrac{3}{xy^2}$. b. $\dfrac{x}{(x + y)^2}$ và $\dfrac{1}{2(x + y)}$.

Bài tập 4. Các phân thức sau có bằng nhau không?

a. $A = \dfrac{x^3y^3}{xy^3}$, $B = \dfrac{x^2}{y}$. d. $A = \dfrac{x(x - 1)}{x - 1}$, $B = x$.

b. $A = \dfrac{x - 1}{x^2 - 1}$, $B = \dfrac{1}{x + 1}$. e. $A = \dfrac{3(x - 1)}{(1 - x)^2}$, $B = \dfrac{3(x + 1)}{(x - 1)^2}$.

c. $A = \dfrac{x^2}{(x + y)^2}$, $B = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$.

Bài tập 5. Hãy so sánh các phân thức sau:

$$\frac{x^2}{2x^2 - x},\quad \frac{-x^2 + x}{-2x^2 + 3x - 1},\quad \frac{x}{2x - 1}$$

Bài tập 6. Hãy chọn đa thức thích hợp điền vào chỗ trống trong đẳng thức:

a. $\dfrac{x^2 + 2x}{x^2 - 4} = \dfrac{x}{\ldots}$ c. $\dfrac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{\ldots} = \dfrac{(x^2 - 1)(x + 1)}{x^2 - 2x + 1}$.

b. $\dfrac{\ldots}{x^2 - 9} = \dfrac{x - 1}{x - 3}$. d. $\dfrac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 9} = \dfrac{\ldots}{x^2 - 6x + 9}$

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 4.

a. $A \neq B$. d. $A = B$.

b. $A = B$. e. $A \neq B$.

c. $A \neq B$.

CHỦ ĐỀ 2 RÚT GỌN PHÂN THỨC

I. PHƯƠNG PHÁP

Chúng ta đã biết việc rút gọn phân số là chia tử và mẫu của phân số cho ước chung (khác 1) của chúng để được một phân số bằng nó nhưng đơn giản hơn, thí dụ:

$$\frac{24}{16} = \frac{3.8}{2.8} = \frac{3}{2}$$

công việc như vậy cũng được sử dụng cho một phân thức, thí dụ như với phân thức:

Phân tích tử thức thành nhân tử

$$\frac{2x^2 - x}{4x^2 - 1} = \frac{x(2x-1)}{(2x-1)(2x+1)} \underset{\text{tử chung } 2x-1}{\overset{\text{Rút gọn nhân}}{=}} \frac{x}{2x+1}.$$

Phân tích mẫu thức thành nhân tử

Từ đó, chúng ta phát biểu quy tắc rút gọn một phân thức đại số:

Quy tắc: ***Muốn rút gọn một phân thức đại số**, ta thực hiện theo các bước:*

Bước 1: Phân tích tử thức và mẫu thức thành nhân tử.

Bước 2: Chia cả tử thức và mẫu thức cho nhân tử chung.

Thí dụ 1: Rút gọn các phân thức:

a. $\frac{15x^2y^3z^8}{9x^3y^3z^4}$. b. $\frac{x^2 - 9}{3x - x^2}$. c. $\frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + 1}$.

Giải

a. Ta có:

$$\frac{15x^2y^3z^8}{9x^3y^3z^4} = \frac{5z^4}{3x}.$$

b. Ta có:

$$\frac{x^2 - 9}{3x - x^2} = \frac{(x-3)(x+3)}{x(3-x)} = \frac{(x-3)(x+3)}{-x(x-3)} = \frac{x+3}{-x}.$$

c. Ta có:

$$\frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + 1} = \frac{x^2(x-1) - (x-1)}{x^3 + 1} = \frac{(x^2-1)(x-1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$= \frac{(x-1)(x+1)(x-1)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{(x-1)^2}{x^2-x+1}.$$

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Rút gọn các phân thức:

a. $\dfrac{x^2+y^2-1+2xy}{x^2-y^2+1+2x}$.   b. $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-8x+15}$.

Giải

a. Ta có:

$$\frac{x^2+y^2-1+2xy}{x^2-y^2+1+2x}=\frac{(x+y)^2-1}{(x+1)^2-y^2}=\frac{(x+y+1)(x+y-1)}{(x+1+y)(x+1-y)}=\frac{x+y-1}{x-y+1}.$$

b. Ta có:

$$\frac{x^2-6x+9}{x^2-8x+15}=\frac{(x-3)^2}{(x^2-8x+16)-1}=\frac{(x-3)^2}{(x-4)^2-1}=\frac{(x-3)^2}{(x-4-1)(x-4+1)}$$

$$=\frac{x-3}{x-5}.$$

Ví dụ 2: Biết $x - y = -\dfrac{1}{2}$, tính giá trị của phân thức:

$$\frac{2y-2x}{x^2-2xy+y^2}.$$

Giải

Biến đổi phân thức về dạng:

$$\frac{2y-2x}{x^2-2xy+y^2}=\frac{-2(x-y)}{(x-y)^2}=\frac{-2}{x-y}.$$

Khi đó, với $x - y = -\dfrac{1}{2}$ giá trị của phân thức bằng 4.

Ví dụ 3: Rút gọn rồi tính giá trị của phân thức:

$$P=\frac{x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}{x^4-1}, \text{ với } x = 2.$$

Giải

Biến đổi phân thức về dạng:

$$P=\frac{x^6(x+1)+x^4(x+1)+x^2(x+1)+x+1}{x^4-1}$$

$$=\frac{(x+1)(x^6+x^4+x^2+1)}{(x^2-1)(x^2+1)}$$

$$=\frac{(x+1)[x^4(x^2+1)+x^2+1]}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}=\frac{(x^2+1)(x^4+1)}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{x^4+1}{x-1}$$

Khi đó, với $x = 2$ giá trị của phân thức bằng 17.

Ví dụ 4: Với a, b là hằng số thoả mãn $a \neq 0$ và $b \neq 1$. Tìm x, biết:

$$ax - abx = a^2c - ab.$$

Giải

Biến đổi biểu thức về dạng:

$$ax(1 - b) = a(ac - b) \overset{a \neq 0 \text{ và } b \neq 1}{\Leftrightarrow} x = \frac{a(ac - b)}{a(1 - b)} = \frac{ac - b}{1 - b}.$$

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Phát biểu quy tắc rút gọn một phân thức đại số.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Rút gọn các phân thức:

a. $\frac{9x^2y}{12xy^2}$.

b. $\frac{x(x+2)}{x^2(2+x)}$.

c. $\frac{x^2 - 3x}{x^3 - 9x}$.

d. $\frac{x^2 - 3x}{9 - x^2}$.

e. $\frac{x - x^2}{x^2 - 1}$.

f. $\frac{3(x - y)}{x(y - x)}$.

g. $\frac{2x - 4y}{x^2 - 4y^2}$.

h. $\frac{x^2 - xy}{y^2 - x^2}$.

Bài tập 2. Rút gọn các phân thức:

a. $\frac{x^2 + y^2 - 4 + 2xy}{x^2 - y^2 + 4 + 4x}$.

b. $\frac{x^2 - x - xy + y}{xy - x - y^2 + y}$.

Bài tập 3. Rút gọn phân thức rồi tính giá trị của phân thức với $x = 0,2$:

a. $\frac{x^4 - 2x^3}{2x^2 - x^3}$.

b. $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 6x + 8}$.

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. $\frac{3x}{4y}$.

b. $\frac{1}{x}$.

c. $\frac{1}{x+3}$.

d. $\frac{x}{-x-3}$.

e. $\frac{x}{-x-1}$.

f. $\frac{3}{-x}$.

g. $\frac{2}{x+2y}$.

h. $\frac{x}{-y-x}$.

Bài tập 2. Rút gọn các phân thức:

a. $\frac{x + y - 2}{x - y + 2}$.

b. $\frac{x - 1}{y - 1}$.

CHỦ ĐỀ 3 QUY ĐỒNG MẪU THỨC NHIỀU PHÂN THỨC

I. PHƯƠNG PHÁP

Chúng ta đã biết quy tắc quy đồng mẫu hai phân số, thí dụ với hai phân số $\frac{1}{2}$ và $\frac{4}{3}$, ta thực hiện:

- Mẫu số chung của hai phân số bằng 6.
- Khi đó, ta biến đổi:

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} \quad \text{và} \quad \frac{4}{3} = \frac{8}{6}.$$

(nhân cả tử và mẫu với 3 và 2)

Đối với phân thức ta cũng có định nghĩa:

Định nghĩa : *Quy đồng mẫu thức nhiều phân thức là biến đổi các phân thức đã cho thành những phân thức mới có cùng mẫu thức và lần lượt bằng các phân thức đã cho.*

Do đó, với hai phân thức $\frac{2}{3ab}$ và $\frac{1}{4b^2}$ ta cũng có:

$$\frac{2}{3ab} = \frac{8b}{12ab^2} \quad \text{và} \quad \frac{1}{4b^2} = \frac{3a}{12ab^2}$$

Nhân tử phụ thứ 1 (4b)
Nhân tử phụ thứ 2 (3a)
Mẫu thức chung

như vậy, với hai phân thức trên việc xác định được ngay mẫu thức chung $12ab^2$ của chúng là khá đơn giản. Tuy nhiên, để xây dựng được một quy tắc chuẩn (*thuật toán* chung) để quy đồng mẫu thức nhiều phân thức chúng ta hãy bắt đầu với việc thay a = x và b = x - 2, khi đó:

$$\frac{2}{3x(x-2)} = \frac{2}{3x^2 - 6x} \quad \text{và} \quad \frac{1}{4(x-2)^2} = \frac{1}{4x^2 - 16x + 16}$$

và yêu cầu được phát biểu dưới dạng:

" *Quy đồng mẫu thức của hai phân thức* $\frac{2}{3x^2 - 6x}$ *và* $\frac{1}{4x^2 - 16x + 16}$ "

Khi đó, ta sẽ thực hiện theo các bước:

- Phân tích các mẫu thức thành nhân tử:

$$3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$
$$4x^2 - 16x + 16 = 4(x^2 - 4x + 4) = 4(x - 2)^2$$

suy ra, mẫu thức chung là $12x(x - 2)^2$.

- Ta có:

$$12x(x - 2)^2 = 3x(x - 2).4(x - 2)$$

=> phân thức thứ nhất có nhân tử phụ là $4(x - 2)$.

$$12x(x - 2)^2 = 4(x - 2)^2.3x$$

=> phân thức thứ hai có nhân tử phụ là $3x$.

- Vậy, ta được :

$$\frac{2}{3x^2 - 6x} = \frac{2}{3x(x - 2)} = \frac{8(x - 2)}{12x(x - 2)^2}$$

$$\frac{1}{4x^2 - 16x + 16} = \frac{1}{4(x - 2)^2} = \frac{3x}{12x(x - 2)^2}.$$

Qua thí dụ trên, chúng ta có được quy tắc như sau:

Quy tắc: ***Muốn quy đồng mẫu thức nhiều phân thức***, *ta thực hiện theo các bước:*

Bước 1: Phân tích các mẫu thức thành các nhân tử rồi tìm mẫu thức chung.

Bước 2: Tìm nhân tử phụ của mỗi phân thức.

Bước 3: Nhân cả tử và mẫu của mỗi phân thức với nhân tử phụ tương ứng.

Thí dụ 1: Quy đồng mẫu thức các phân thức:

a. $\frac{1}{x^2 - 3x + 2}, \frac{2}{3x^2 - 15x + 12}$.

b. $\frac{1}{x^2 - 4}, \frac{x}{x^2 - 2x}, \frac{3}{x + 1}$.

Giải

a. Ta lần lượt thực hiện:

- Phân tích các mẫu thức thành nhân tử:

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$

$$3x^2 - 15x + 12 = 3(x^2 - 5x + 4) = 3(x - 1)(x - 5)$$

suy ra, mẫu thức chung là $3(x - 1)(x - 2)(x - 5)$.

- Ta có:

$$3(x - 1)(x - 2)(x - 5) = (x - 1)(x - 2).3(x - 5)$$

=> phân thức thứ nhất có nhân tử phụ là $3(x - 5)$.

$$3(x - 1)(x - 2)(x - 5) = 3(x - 1)(x - 5). (x - 2)$$

=> phân thức thứ hai có nhân tử phụ là $x - 2$.

- Vậy, ta được :

$$\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{3(x - 5)}{3(x - 1)(x - 2)(x - 5)}$$

$$\frac{2}{3x^2 - 15x + 12} = \frac{2}{3(x - 1)(x - 5)} = \frac{2(x - 2)}{3(x - 1)(x - 2)(x - 5)}.$$

Nhận xét: Như vậy, bằng việc thực hiện dựa trên thuật toán trong quy tắc trên chúng ta đã quy đồng được mẫu thức của hai

phân thức đã cho, tuy nhiên các em học sinh hẳn sẽ thắc mắc về sự cồng kềnh không đáng có trong lời giải trên khi các kết quả ở bước 1 và bước 2 đều được lặp lại trong bước 3. Chính vì lý do này mà có thể bỏ qua được bước 1 và bước 2 trong lời giải.

b. Ta có:

$\frac{1}{x^2-4}$	$=\frac{1}{(x-2)(x+2)}$	$=\frac{x+1}{(x-2)(x+2)(x+1)}$
$\frac{x}{x^2-2x}$	$=\frac{x}{x(x-2)}=\frac{1}{x-2}$	$=\frac{(x+1)(x+2)}{(x-2)(x+2)(x+1)}$
$\frac{3}{x+1}$		$=\frac{3(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+2)(x+1)}$
Cột 1	***Cột 2***	***Cột 3***

Nhận xét: Như vậy, để có được lời giải ngắn gọn với yêu cầu "*Quy đồng mẫu thức n phân thức*" chúng ta thực hiện như sau:

- Viết n phân thức trên n dòng - ***Cột 1***.
- Biến đổi các phân thức về dạng mẫu thức đã được phân tích thành các nhân tử (*thực hiện việc rút gọn nếu có thể*). Từ đây xác định được mẫu thức chung và ghi ra nháp - ***Cột 2***.
- Tìm nhân tử phụ cho mỗi mẫu thức và nhân cả tử và mẫu của mỗi phân thức với nhân tử phụ tương ứng - ***Cột 3***.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Với yêu cầu " *Quy đồng mẫu thức các phân thức* " chúng ta sẽ lựa chọn cách trình bày như trong nhận xét trên.

Ví dụ 1: Quy đồng mẫu thức các phân thức:

$$\frac{x}{x^3-3x^2y+3xy^2-y^3},\ \frac{y}{xy-x^2},\ x+y.$$

Giải

Ta có:

$$\frac{x}{x^3-3x^2y+3xy^2-y^3}=\frac{x}{(x-y)^3}=\frac{x^2}{x(x-y)^3}$$

$$\frac{y}{xy-x^2}=\frac{y}{x(y-x)}=\frac{-y}{x(x-y)}=\frac{-y(x-y)^2}{x(x-y)^3}$$

$$x+y=\frac{x+y}{1}=\frac{x(x+y)(x-y)^3}{x(x-y)^3}.$$

Chú ý: Trong một vài trường hợp, chúng ta cần thực hiện việc rút gọn phân thức để lựa chọn được mẫu thức chung đơn giản. Ví dụ sau sẽ minh hoạ cho chú ý này.

Ví dụ 2: Quy đồng mẫu thức hai phân thức:

$$\frac{3x^2}{x^3-6x^2}, \frac{x-1}{x^2-x}.$$

Giải

Ta có:

$$\frac{3x^2}{x^3-6x^2}=\frac{3x^2}{x^2(x-6)}=\frac{3}{x-6}=\frac{3x}{x(x-6)}=\frac{3x}{x^2-6x}$$

$$\frac{x-1}{x^2-x}=\frac{x-1}{x(x-1)}=\frac{1}{x}=\frac{1.(x-6)}{x(x-6)}=\frac{x-6}{x^2-6x}.$$

Nhân xét: Trong ví dụ trên, nếu chúngta không thực hiện việc rút gọn phhan thức thì việc quy đồng mẫu thức cho hai phân thức này sẽ rất cồng kềnh.

Ví dụ 3: Cho hai phân thức:

$$\frac{1}{x^2+3x-10} \text{ và } \frac{x}{x^2+7x+10}.$$

Không dùng cách phân tích các mẫu thức thành nhân tử, hãy chứng tỏ rằng có thể quy đồng mẫu thức hai phân thức trên với mẫu thức chung là $x^3 + 5x^2 - 4x - 20$.

Giải

Thực hiện phép chia đa thức $x^3 + 5x^2 - 4x - 20$ cho các mẫu thức của hai phân thức trên ta được:

$x^3 + 5x^2 - 4x - 20 = (x^2 + 3x - 10)(x + 2)$.

$x^3 + 5x^2 - 4x - 20 = (x^2 + 7x + 10)(x - 2)$.

Do đó:

$$\frac{1}{x^2+3x-10}=\frac{x+2}{(x^2+3x-10)(x+2)}=\frac{x+2}{x^3+5x^2-4x-20}$$

$$\frac{x}{x^2+7x+10}=\frac{x(x-2)}{(x^2+7x+10)(x-2)}=\frac{x^2-2x}{x^3+5x^2-4x-20}.$$

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Thế nào là việc quy đồng mẫu thức nhiều phân thức ?

Câu hỏi 2: Phát biểu quy tắc quy đồng mẫu thức nhiều phân thức.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Quy đồng mẫu thức các phân thức:

a. $\frac{x}{6}, \frac{x-3}{3}, \frac{x^3}{4}$.

b. $\frac{2}{3x^3y^2}, \frac{3}{4x^7y}$.

c. $\frac{5}{6xy^2}, \frac{4}{9x^3y}$.

d. $\frac{1}{x^4y^6z}, \frac{2}{3x^2y^7z^2}, \frac{3}{4x^5y}$.

Bài tập 2. Quy đồng mẫu thức các phân thức:

a. $x - y, \frac{x}{x+y}$.

b. $\frac{x}{x^2 - 2xy + y^2}, \frac{x+y}{y^2 - xy}$.

c. $\frac{1}{2x+2y}, \frac{y}{x^2+2xy+y^2}$.

d. $\frac{3x}{2x^2+6x}, \frac{2x+6}{x^3+3x^2-9x-27}$.

Bài tập 3. Quy đồng mẫu thức các phân thức:

a. $\frac{x}{x-y}, \frac{y}{(x-y)^2}, \frac{1}{(x-y)^3}$.

b. $\frac{x}{2x-4}, \frac{1}{2x+4}, \frac{3}{4-x^2}$.

c. $\frac{x}{x-y}, \frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2}, x+y$.

d. $\frac{1}{x^3+1}, \frac{3}{2x+2}, \frac{2}{x^2-x+1}$.

Bài tập 4. Quy đồng mẫu thức các phân thức:

a. $\frac{x}{x+1}, \frac{x^2}{1-x}, \frac{1}{x^2-1}$.

b. $\frac{x-1}{2x+2}, \frac{x+1}{2x-2}, \frac{1}{1-x^2}$.

Bài tập 5. Quy đồng mẫu thức các phân thức:

a. $\frac{3x+6}{x^2-4}, \frac{5x}{x^2-2x}, \frac{1-x}{x^2-3x+2}$.

b. $\frac{1}{3x+3y}, \frac{1}{2y+2x}, \frac{1}{x^2+2xy+y^2}$.

Bài tập 6. Cho hai phân thức:

$$\frac{1}{x^2+3x+2} \text{ và } \frac{x}{x^2-1}.$$

Không dùng cách phân tích các mẫu thức thành nhân tử, hãy chứng tỏ rằng có thể quy đồng mẫu thức hai phân thức trên với mẫu thức chung là $x^3 + 2x^2 - x - 2$.

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. $\frac{2x}{12}, \frac{4(x-3)}{12}, \frac{3x^3}{12}$.

b. $\frac{4x^4}{12x^7y^2}, \frac{9y}{4x^7y^2}$.

c. $\frac{15x^2}{18x^3y^2}, \frac{8y}{18x^3y^2}$.

d. $\frac{12xyz}{12x^5y^7z^2}, \frac{8x^3}{12x^5y^7z^2}, \frac{9y^6z^2}{12x^5y^7z^2}$.

Bài tập 2.

a. $\frac{x^2-y^2}{x+y}, \frac{x}{x+y}$.

b. $\frac{xy}{y(x-y)^2}, \frac{y^2-x^2}{y(x-y)^2}$.

c. $\frac{x+y}{2(x+y)^2}, \frac{2y}{2(x+y)^2}$.

d. Ta có:

$$\frac{3x}{2x^2+6x} = \frac{3x}{2x(x+3)} = \frac{3}{2(x+3)} = \frac{3(x-3)}{2(x-3)(x+3)}$$

$$\frac{2x+6}{x^3+3x^2-9x-27} = \frac{2(x+3)}{x^2(x+3)-9(x+3)} = \frac{2(x+3)}{(x+3)(x^2-9)}$$

$$= \frac{2}{x^2-9} = \frac{2}{(x-3)(x+3)} = \frac{4}{2(x-3)(x+3)}.$$

Bài tập 3.

a. $\frac{x(x-y)^2}{(x-y)^3}, \frac{y(x-y)}{(x-y)^3}, \frac{1}{(x-y)^3}$.

b. Ta có:

$$\frac{x}{2x-4} = \frac{x}{2(x-2)} = \frac{-x(2+x)}{2(2-x)(2+x)},$$

$$\frac{1}{2x+4} = \frac{1}{2(x+2)} = \frac{2-x}{2(2-x)(2+x)},$$

$$\frac{3}{4-x^2} = \frac{3}{(2-x)(2+x)} = \frac{6}{2(2-x)(2+x)}$$

c. $\frac{x}{x-y}, \frac{x+y}{x-y}, \frac{x^2-y^2}{x-y}$.

d. Ta có:

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{2}{2(x+1)(x^2-x+1)},$$

$$\frac{3}{2x+2} = \frac{3}{2(x+1)} = \frac{3(x^2-x+1)}{2(x+1)(x^2-x+1)},$$

$$\frac{2}{x^2-x+1} = \frac{4(x+1)}{2(x+1)(x^2-x+1)}.$$

Bài tập 4. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 5.

a. Ta có:

$$\frac{3x+6}{x^2-4} = \frac{3(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{3}{x-2},$$

$$\frac{5x}{x^2-2x} = \frac{5x}{x(x-2)} = \frac{5}{x-2},$$

$$\frac{1-x}{x^2-3x+2} = \frac{1-x}{(x-1)(x-2)} = \frac{-1}{x-2}.$$

b. $\frac{2(x+y)}{6(x+y)^2}, \frac{3(x+y)}{6(x+y)^2}, \frac{6}{6(x+y)^2}.$

Nhóm Cự Môn chúng tôi đã và đang theo đuổi mục tiêu viết ra được một bộ giáo trình Toán phổ thông (PTCS và PTTH) với nội dung bao gồm:

1. *Đầy đủ các kiến thức theo quy chuẩn của BGD và ĐT.*
2. *Kiến thức được trình bày theo kiểu đặt vấn đề và các yêu cầu hành động để thay đổi kiểu dạy học theo lối thụ động.*
3. *Sau mỗi chủ đề kiến thức đều có phần hướng dẫn sử dụng máy tính Casio Fx570 Ms hoặc các phần mềm máy vi tính để trợ giúp cho việc giải toán (giảm thiểu các bài toán tính toán phức tạp).*
4. *Những chủ đề kiến thức cần thiết sẽ được chia nhỏ thành phần lý thuyết và các dạng toán để giúp cho việc dạy và học nâng cao.*
5. *Có đĩa CD kèm theo để:*
   - *Giáo viên có thể thực hiện bài giảng bằng máy chiếu.*
   - *Học sinh có thể học ngay trên máy tính.*

Do vậy, chúng tôi rất mong nhận được những ý kiến đóng góp có tính xây dựng của tất cả các Thày giáo, Cô giáo, Nhà nghiên cứu, Phụ huynh và Học sinh trên toàn quốc.

CHỦ ĐỀ 4 CÁC PHÉP TOÁN CỦA PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

Cũng như đa thức, đối với phân thức đại số sau khi chúng ta định nghĩa được nó cần xây dựng các phép toán đại số cho chúng, bao gồm:

1. ***Phép cộng các phân thức đại số***, cụ thể:

   $\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=?$ - *Có giống với phép cộng phân số không ?*

2. ***Phép trừ các phân thức đại số***, cụ thể:

   $\frac{A}{B}-\frac{C}{D}=?$ - *Có giống với phép trừ phân số không ?*

3. ***Phép nhân các phân thức đại số***, cụ thể:

   $\frac{A}{B}.\frac{C}{D}=?$ - *Có giống với phép nhân phân số không ?*

4. ***Phép chia các phân thức đại số***, cụ thể:

   $\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=?$ - *Có giống với phép chia phân số không ?*

Trong chủ đề này chúng ta sẽ tiếp cận được với các phép toán trên thông qua các bài toán.

Phép toán 1

PHÉP CỘNG CÁC PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

I. PHƯƠNG PHÁP

1. CỘNG CÁC PHÂN THỨC CÙNG MẪU THỨC

Chúng ta đã biết quy tắc cộng hai phân số có cùng mẫu, thí dụ:

$$\frac{2}{3}+\frac{11}{3}=\frac{2+11}{3}=\frac{13}{3}$$

(Cộng các tử số với nhau và giữ nguyên mẫu số → Rút gọn)

và với hai phân thức cùng mẫu thức ta cũng có:

$$\frac{x-2}{2x}+\frac{3x+1}{2x}=\frac{x-2+3x+1}{2x}=\frac{4x-1}{2x}$$

(Cộng các tử số với nhau và giữ nguyên mẫu thức → Rút gọn)

Vậy, phép cộng các phân thức cùng mẫu thức được minh hoạ bởi:

$$\frac{A_1}{B}+\frac{A_2}{B}+\ldots+\frac{A_n}{B}=\frac{A_1+A_2+\ldots+A_n}{B}$$

Quy tắc: ***Muốn cộng các phân thức cùng mẫu thức**, ta cộng các tử thức với nhau và giữ nguyên mẫu thức.*

Thí dụ 1: Thực hiện phép cộng:

a. $\frac{2x+5}{3}+\frac{x-2}{3}$.   b. $\frac{x}{x-1}+\frac{1}{1-x}$.

Giải

a. Ta có:

$$\frac{2x+5}{3}+\frac{x-2}{3}=\frac{2x+5+x-2}{3}=\frac{3x+3}{3}=x+1.$$

b. Ta có:

$$\frac{x}{x-1}+\frac{1}{1-x}=\frac{x}{x-1}-\frac{1}{x-1}=\frac{x-1}{x-1}=1.$$

2. CỘNG CÁC PHÂN THỨC CÓ MẪU THỨC KHÁC NHAU

Chúng ta đã biết quy tắc cộng hai phân số không cùng mẫu, thí dụ:

$$\frac{1}{3}+\frac{3}{4}=\frac{4}{12}+\frac{9}{12}=\frac{4+9}{12}=\frac{13}{12}$$

(Quy đồng mẫu số → Cộng các phân số có cùng mẫu số → Rút gọn)

và với hai phân thức có mẫu thức khác nhau chúng ta cũng cần thực hiện các cộng việc tương tự như vậy, từ đó ta có quy tắc sau:

Quy tắc: ***Muốn cộng các phân thức có mẫu thức khác nhau**, ta thực hiện phép quy đồng mẫu thức rồi cộng các phân thức có cùng mẫu thức vừa tìm được.*

Thí dụ 2: Thực hiện phép cộng:

$$\frac{4}{x+2}+\frac{3}{2-x}+\frac{12}{x^2-4}.$$

Giải

Ta có:

$$\frac{4}{x+2}+\frac{3}{2-x}+\frac{12}{x^2-4}=\frac{4}{x+2}+\frac{-3}{x-2}+\frac{12}{(x+2)(x-2)}$$

$$=\frac{4(x-2)-3(x+2)+12}{(x+2)(x-2)}=\frac{4x-8-3x-6+12}{(x+2)(x-2)}$$

$$=\frac{x-2}{(x+2)(x-2)}=\frac{1}{x+2}.$$

3. CÁC TÍNH CHẤT CỦA CỘNG CÁC PHÂN THỨC

Ta có:

1. $\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\frac{C}{D}+\frac{A}{B}$ - *Tính chất giao hoán.*

2. $\left(\frac{A}{B}+\frac{C}{D}\right)+\frac{E}{F}=\frac{A}{B}+\left(\frac{C}{D}+\frac{E}{F}\right)$ - *Tính chất kết hợp.*

Lưu ý rằng, nhờ tính chất kết hợp, trong một dãy phép cộng nhiều phân thức, ta không cần đặt dấu ngoặc.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Chứng tỏ rằng biểu thức sau không phụ thuộc x:

$$P=\frac{x}{x+1}+\frac{x}{x-1}+\frac{2x^2}{1-x^2}.$$

Giải

Ta có:

$$P=\frac{x}{x+1}+\frac{x}{x-1}-\frac{2x^2}{x^2-1}=\frac{x(x-1)+x(x+1)-2x^2}{x^2-1}=0.$$

Vậy P không phụ thuộc x.

Ví dụ 2: Biết xy = - 1, tính giá trị của biểu thức:

$$P=\frac{1}{y^2-xy}+\frac{1}{x^2-xy}.$$

Giải

Ta có:

$$P=\frac{1}{y(y-x)}+\frac{1}{x(x-y)}=\frac{1}{y(y-x)}+\frac{1}{x(y-x)}=\frac{x-y}{xy(y-x)}=\frac{-1}{xy}.$$

Khi đó, với xy = - 1 ta nhận được P = 1.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Phát biểu quy tắc cộng các phân thức cùng mẫu thức.

Câu hỏi 2: Phát biểu quy tắc cộng các phân thức có mẫu thức khác nhau.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Thực hiện phép cộng:

a. $x + \frac{x-1}{2} + \frac{x-2}{3}$.

b. $\frac{1-5x}{6x} + \frac{x-1}{2x} + \frac{2x+1}{3x}$.

Bài tập 2. Thực hiện phép cộng:

a. $\frac{1}{x-y} + \frac{2}{x+y} + \frac{3x}{y^2-x^2}$.

b. $\frac{x+1}{2x-2} + \frac{x^2+3}{2-2x^2}$.

c. $\frac{1}{x+2} + \frac{2}{x-2} + \frac{x}{x^2-4}$.

d. $\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y} + \frac{2xy}{y^2-x^2}$.

Bài tập 3. Thực hiện phép cộng:

a. $\frac{x^2}{x^2-4} + \frac{1}{x+2} + \frac{2}{2-x}$.

b. $\frac{1}{(x-y)(y-z)} + \frac{1}{(y-z)(z-x)} + \frac{1}{(z-x)(x-y)}$.

Bài tập 4. Cho phân thức:

$$A = \frac{4x^2 - 2x + 7}{2x - 1}.$$

a. Viết phân thức A dưới dạng tổng của một biểu thức nguyên và một phân thức có tử thức là hằng số.

b. Tìm giá trị nguyên của x để giá trị của phân thức A là một số nguyên.

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. $\frac{11x-7}{6}$.

b. $\frac{1}{3}$.

Bài tập 2.

a. $-\frac{y}{x^2-y^2}$.

b. $\frac{1}{x+1}$.

c. $\frac{4x-2}{x^2-4}$.

d. $\frac{x-y}{x+y}$.

Bài tập 3.

a. $\frac{x-3}{x-2}$.

b. 0.

Bài tập 4.

a. Biến đổi A về dạng $A = 2x + \frac{7}{2x-1}$.

b. $x = 0, x = 1, x = -3, x = 4$.

Phép toán 2

PHÉP TRỪ CÁC PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

I. PHƯƠNG PHÁP

1. PHÂN THỨC ĐỐI

Chúng ta đã biết hai số đối nhau là hai số có tổng bằng 0, thí dụ 2 và - 2 là hai số đối nhau. Định nghĩa này cũng sử dụng để chỉ hai phân thức đối nhau.

Từ đó, mọi phân thức $\frac{A}{B}$ đều có phân thức đối là $-\frac{A}{B}$ (hoặc $\frac{-A}{B}$ hoặc $\frac{A}{-B}$).

2. PHÉP TRỪ

Định nghĩa: Hiệu của hai phân thức $\frac{A}{B}$ và $\frac{C}{D}$, kí hiệu bởi $\frac{A}{B} - \frac{C}{D}$ là tổng của $\frac{A}{B}$ với phân thức đối của $\frac{C}{D}$.

Vậy, ta được:

$$\frac{A}{B} - \frac{C}{D} = \frac{A}{B} + \left(-\frac{C}{D}\right) = \frac{A}{B} + \frac{-C}{D}$$

<u>**Thí dụ 1:**</u> Thực hiện phép trừ:

$$\frac{1}{3x-2} - \frac{4}{3x+2} - \frac{3x-6}{4-9x^2}$$

Giải

Ta có:

$$\frac{1}{3x-2} - \frac{4}{3x+2} - \frac{3x-6}{4-9x^2} = \frac{1}{3x-2} - \frac{4}{3x+2} + \frac{3x-6}{(3x-2)(3x+2)}$$

$$= \frac{3x+2-4(3x-2)+3x-6}{(3x+2)(3x-2)}$$

$$= \frac{3x+2-12x+8+3x-6}{(3x+2)(3x-2)}$$

$$= \frac{-6x+4}{(3x+2)(3x-2)} = \frac{-2(3x-2)}{(3x+2)(3x-2)} = \frac{-2}{3x+2}$$

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

<u>**Ví dụ 1:**</u> Thực hiện phép trừ:

$$\frac{x^2-1}{2x^2-4x+2} - \frac{x+3}{2x+2}.$$

Giải

Ta có:

$$\frac{x^2-1}{2x^2-4x+2} - \frac{x+3}{2x+2} = \frac{(x+1)(x-1)}{2(x^2-2x+1)} - \frac{x+3}{2(x+1)}$$

$$= \frac{(x+1)(x-1)}{2(x-1)^2} - \frac{x+3}{2(x+1)} = \frac{x+1}{2(x-1)} - \frac{x+3}{2(x+1)}$$

$$= \frac{(x+1)^2 - (x+3)(x-1)}{2(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{x^2+2x+1-x^2+x-3x+3}{2(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{4}{2(x^2-1)} = \frac{2}{x^2-1}.$$

Chú ý: Cần chú ý rút gọn phân thức trước khi thực hiện phép tính. Nếu không ta phải chọn mẫu thức chung là $2(x-1)^2(x+1)$, khi đó tính toán sẽ phức tạp hơn nhiều.

Ví dụ 2: Tính tổng sau:

$$S = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)}.$$

Giải

Ta có:

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{(x+1)-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1},$$

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{(x+2)-(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2},$$

$$\frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{(x+3)-(x+2)}{(x+2)(x+3)} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3},$$

$$\frac{1}{(x+3)(x+4)} = \frac{(x+4)-(x+3)}{(x+3)(x+4)} = \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4},$$

suy ra:

$$S = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+4} = \frac{x+4-x}{x(x+4)} = \frac{4}{x(x+4)}.$$

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Nêu định nghĩa phân thức đối và cho ví dụ.

Câu hỏi 2: Phát biểu định nghĩa phép trừ hai phân thức.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Thực hiện phép trừ:

a. $\dfrac{x^2+4}{x} - \dfrac{3x+4}{x}$. b. $\dfrac{a-1}{x-y} - \dfrac{a-2}{y-x} - \dfrac{2a-3}{x-y}$.

Bài tập 2. Thực hiện phép trừ:

a. $x-2-\dfrac{x^2-10}{x+2}$. b. $\dfrac{x}{y^2-xy} - \dfrac{y}{xy-x^2}$.

Bài tập 3. Thực hiện phép tính:

a. $\dfrac{x}{2x-2} + \dfrac{3x}{2x+2} - \dfrac{2x^2}{x^2-1}$. c. $\dfrac{1}{2x-2y} - \dfrac{1}{2x-2y} + \dfrac{y}{y^2-x^2}$.

b. $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x^3+1} + \dfrac{1}{x^2-x+1}$ d. $\dfrac{1}{6x-4y} - \dfrac{1}{6x+4y} - \dfrac{3x}{4y^2-9x^2}$

Bài tập 4. Thực hiện phép tính:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} + \frac{2}{(x-2)(x-3)} - \frac{3}{(x-3)(x-1)}.$$

Bài tập 5. Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức A với $x = 0,25$:

$$A = \frac{2x+1}{4x-2} + \frac{1-2x}{4x+2} - \frac{2}{1-4x^2}.$$

Bài tập 6. Tính nhanh tổng sau:

a. $S = \dfrac{1}{x(x-1)} + \dfrac{1}{(x-1)(x-2)} + \dfrac{1}{(x-2)(x-3)} + \dfrac{1}{(x-3)(x-4)}$.

b. $S = \dfrac{1}{x(x+1)} + \dfrac{1}{(x+1)(x+2)} + \dfrac{1}{(x+2)(x+3)} + \dfrac{1}{(x+3)(x+4)} + \dfrac{1}{(x+4)(x+5)} + \dfrac{1}{(x+5)(x+6)}$.

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. $x-3$. b. 0.

Bài tập 2.

a. $\dfrac{6}{x+2}$. b. $-\dfrac{x+y}{x}$.

Bài tập 3.

a. $-\dfrac{x}{x^2-1}$. b. $\dfrac{x-1}{x^2-x+1}$.

Phép toán 3	PHÉP NHÂN CÁC PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

I. PHƯƠNG PHÁP

Chúng ta đã biết quy tắc nhân hai phân số, cụ thể:

$$\frac{1}{3}.\frac{3}{4}=\frac{1.3}{3.4}=\frac{1}{4}$$

→ Nhân tử số với nhau
→ Rút gọn
→ Nhân mẫu số với nhau

và quy tắc này vẫn đúng với hai phân thức đại số, từ đó ta có quy tắc sau:

Quy tắc: ***Muốn nhân hai phân thức**, ta nhân các tử thức với nhau, các mẫu thức với nhau.*

Vậy, ta được:

$$\frac{A}{B}.\frac{C}{D}=\frac{A.C}{B.D}$$

Phép nhân các phân thức có các tính chất:

1. $\frac{A}{B}.\frac{C}{D}=\frac{C}{D}.\frac{A}{B}$ - *Tính chất giao hoán.*

2. $\left(\frac{A}{B}.\frac{C}{D}\right).\frac{E}{F}=\frac{A}{B}.\left(\frac{C}{D}.\frac{E}{F}\right)$ - *Tính chất kết hợp.*

3. $\left(\frac{A}{B}+\frac{C}{D}\right).\frac{E}{F}=\frac{A}{B}.\frac{E}{F}+\frac{C}{D}.\frac{E}{F}$ - *Tính chất phân phối đối với phép cộng.*

Lưu ý rằng, nhờ tính chất kết hợp, trong một dãy phép nhân nhiều phân thức, ta không cần đặt dấu ngoặc.

Thí dụ 1: Thực hiện phép tính:

a. $(x^2-y^2).\frac{x^2+y^2}{y^4-x^2y^2}$.

b. $\frac{x^2+4x+4}{1-x}.\frac{(x-1)^2}{3(x+2)^3}$.

Giải

a. Ta có:

$$(x^2-y^2).\frac{x^2+y^2}{y^4-x^2y^2}=\frac{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}{-y^2(x^2-y^2)}=-\frac{x^2+y^2}{y^2}.$$

b. Ta có:

$$\frac{x^2+4x+4}{1-x}.\frac{(x-1)^2}{3(x+2)^3}=-\frac{(x+2)^2}{x-1}.\frac{(x-1)^2}{3(x+2)^3}=\frac{x-1}{3(x+2)}.$$

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{x-1}{x}\cdot\left(\frac{x^3}{x-1} + x^2 + x + 1\right).$$

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Ta có:

$$A = \frac{x-1}{x}\cdot\frac{x^3 + (x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = \frac{x^3 + x^3 - 1}{x} = \frac{2x^3-1}{x}.$$

Cách 2: (*Sử dụng tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng*) ta có:

$$A = \frac{x-1}{x}\cdot\frac{x^3}{x-1} + \frac{x-1}{x}.x^2 + \frac{x-1}{x}.x + \frac{x-1}{x}$$

$$= x^2 + (x-1)x + x - 1 + \frac{x-1}{x}$$

$$= 2x^2 - 1 + \frac{x-1}{x} = \frac{(2x^2-1)x + x - 1}{x} = \frac{2x^3-1}{x}$$

Cách 3: (*Sử dụng tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng*) ta có:

$$A = \frac{x-1}{x}\cdot\frac{x^3}{x-1} + \frac{x-1}{x}.(x^2+x+1)$$

$$= x^2 + \frac{x^3-1}{x} = \frac{x^3+x^3-1}{x} = \frac{2x^3-1}{x}.$$

Ví dụ 2: Hãy điền vào chỗ trống của dãy phép nhân dưới đây những phân thức có mẫu thức bằng tử thức cộng với 1:

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{x+1}\,.............. = \frac{1}{x+8}.$$

Giải

Ta có nhận xét :

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{x+1} = \frac{1}{x+1},$$

từ đó để đi tới kết quả $\frac{1}{x+8}$ ta cần điền như sau:

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{x+1}\cdot\frac{x+1}{x+2}\cdot\frac{x+2}{x+3}\cdot\frac{x+3}{x+4}\cdot\frac{x+4}{x+5}\cdot\frac{x+5}{x+6}\cdot\frac{x+6}{x+7}\cdot\frac{x+7}{x+8} = \frac{1}{x+8}.$$

Ví dụ 3: Chứng tỏ rằng biểu thức sau nhận giá trị không phụ thuộc vào các biến:

$$A = \left(x - \frac{x^2 + y^2}{x + y}\right)\cdot\left(\frac{1}{y} + \frac{2}{x - y}\right).$$

Giải

Ta có:

$$A = \frac{x(x + y) - x^2 - y^2}{x + y}\cdot\frac{x - y + 2y}{y(x - y)}$$

$$= \frac{x^2 + xy - x^2 - y^2}{x + y}\cdot\frac{x + y}{y(x - y)} = \frac{y(x - y)(x + y)}{y(x + y)(x - y)} = 1.$$

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Phát biểu quy tắc nhân hai phân thức.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Thực hiện phép tính:

a. $\frac{5x + 5y}{3x - 3y}\cdot\frac{x^2 - y^2}{5x}$.

b. $\frac{x - 1}{x + 1}.(x^2 - 1)$.

c. $\frac{x + 2y}{2y}\cdot\frac{4y}{4y^2 - x^2}$.

d. $(x + y).\frac{x - y}{y^2 + xy}$.

Bài tập 2. Thực hiện phép tính:

a. $\frac{a + b + c}{(a + b)^2 - c(a + b)}\cdot\frac{2a + 2b}{a^2 + 2ab + b^2 - c^2}$.

b. $\frac{3x + 3y}{x^2 - 2xy + y^2}\cdot\frac{ax - ay + bx - by}{6x + 6y}$.

c. $\frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 - 1}\cdot\frac{2x^2 + 2x + 2}{x + 1}$.

Bài tập 3. Thực hiện phép tính:

a. $\frac{(x^2 - xy)^2}{x^2 - y^2}\cdot\frac{x^3 + y^3}{x^3y - x^2y^2 + xy^3}$.

b. $\frac{(x^2 + 1)(x^4 + 1)(x^8 + 1)}{x^{16} - 1}$.

Bài tập 4. Hãy điền vào chỗ trống của dãy phép nhân dưới đây những phân thức có mẫu thức bằng tử thức cộng với 1:

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{x + 1}\,\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{1}{x + 6}.$$

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. $\dfrac{(x+y)^2}{3}$. b. $(x+1)^2$. c. $\dfrac{2}{2y-x}$. d. $\dfrac{x-y}{y}$.

Bài tập 2.

a. $\dfrac{2}{(a+b+c)^2}$. b. $\dfrac{a+b}{2(x-y)}$. c. $\dfrac{2(x+1)}{x-1}$.

Bài tập 3.

a. $\dfrac{x(x-y)}{y}$. b. x^2-1.

Phép toán 4

PHÉP CHIA CÁC PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

I. PHƯƠNG PHÁP

1. PHÂN THỨC NGHỊCH ĐẢO

Chúng ta đã biết mọi số $a \neq 0$ luôn tồn tại số $\frac{1}{a}$ để $a.\frac{1}{a} = 1$, và số $\frac{1}{a}$ được gọi là số nghịch đảo của a. Định nghĩa này cũng sử dụng để chỉ phân thức nghịch đảo.

Từ đó, mọi phân thức $\frac{A}{B} \neq 0$ đều có phân thức nghịch đảo là $\frac{B}{A}$.

2. PHÉP CHIA

Định nghĩa: Thương của phân thức $\frac{A}{B}$ và $\frac{C}{D} \neq 0$ là tích của $\frac{A}{B}$ với phân thức nghịch đảo của $\frac{C}{D}$.

Vậy, ta được:

$$\frac{A}{B}:\frac{C}{D} = \frac{A}{B}.\frac{D}{C}$$

Thí dụ 1: Làm tính chia:

$$\frac{x^3y + xy^3}{x^3y}:(x^2 + y^2).$$

Giải

Ta có:

$$\frac{x^3y + xy^3}{x^3y}:(x^2 + y^2) = \frac{xy(x^2 + y^2)}{x^4y}.\frac{1}{x^2 + y^2}$$

$$= \frac{xy(x^2 + y^2)}{x^4y(x^2 + y^2)} = \frac{1}{x^3}.$$

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Thực hiện phép tính:

$$\frac{x - y}{x}:\frac{x^2 - 2xy + y^2}{xy}.\frac{x}{y}.$$

Giải

Ta có:

$$\frac{x - y}{x}:\frac{x^2 - 2xy + y^2}{xy}.\frac{x}{y} = \frac{x - y}{x}.\frac{xy}{(x - y)^2}.\frac{x}{y} = \frac{x}{x - y}.$$

Chú ý: Cần chú ý đến thứ tự thực hiện các phép tính: Nếu trong biểu thức chỉ có phép nhân và phép chia, ta thực hiện phép tính theo thứ tự từ trái sang phải. Như vậy phân thức $\frac{x-y}{x}$ chia cho $\frac{x^2-2xy+y^2}{xy}$ rồi nhân với $\frac{x}{y}$.

Ví dụ 2: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\left(x+1-\frac{4}{x+1}\right):\frac{x+3}{x^2-2x-3}.$$

Giải

Ta thực hiện theo thứ tự " trong ngoặc trước ngoài ngoặc sau "

$$P=\frac{(x+1)^2-4}{x+1}:\frac{x+3}{(x+1)(x-3)}$$

$$=\frac{(x+3)(x-1)}{x+1}\cdot\frac{(x+1)(x-3)}{x+3}$$

$$=(x-1)(x-3)=x^2-4x+3=(x-2)^2-1\geq 1.$$

Vậy, ta được $P_{Min}=1$, đạt được khi $x=2$.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Phát biểu quy tắc chia hai phân thức.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Thực hiện phép tính:

a. $\frac{x+2}{x-2}:\frac{1}{x^2-4}$.

b. $\frac{1-x^4}{x+1}:(x^2+1)$.

c. $\frac{5x+5y}{3x-3y}:\frac{5x}{x^2-y^2}$.

d. $\frac{x^2-y^2}{xy}:(x+y)$.

Bài tập 2. Đơn giản biểu thức:

$$A=\left[\left(\frac{1}{x^2}+1\right)\cdot\frac{1}{x^2+2x+1}+\frac{2}{(x+1)^3}\cdot\left(\frac{1}{x}+1\right)\right]:\frac{x-1}{x^3}.$$

Bài tập 3. Thực hiện phép tính:

a. $(5-5a):\frac{10-10a^2}{1+a}$.

b. $\frac{2a^2-2b^2}{(a-b)^2}:\frac{a+b}{b-a}\cdot\frac{a^2+2ab+b^2}{2a+2b}$.

Bài tập 4. Thực hiện phép tính:

a. $\dfrac{4x^2 - 2}{x} : (1 - 2x)$.

b. $\dfrac{2x^3 - 2}{x + 1} : \dfrac{2x^2 - 2x + 2}{x^2 + 2x + 1}$.

c. $\dfrac{x + 1}{x - 1} : \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 2x + 1}$.

d. $\dfrac{x - 2}{x + 2} : \dfrac{x^2 - 2x + 4}{x^2 + 2x + 4}$.

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. $(x + 2)^2$.

b. $x - 1$.

c. $\dfrac{1}{3}(x + y)^2$.

d. $\dfrac{x - y}{xy}$.

Bài tập 2. $A = \dfrac{x}{x + 1}$.

Bài tập 3.

a. $\dfrac{1}{2}$.

b. $\dfrac{a + b}{b - a}$.

CHỦ ĐỀ 5

BIẾN ĐỔI CÁC BIỂU THỨC HỮU TỈ GIÁ TRỊ CỦA PHÂN THỨC

I. PHƯƠNG PHÁP

1. BIẾN ĐỔI MỘT BIỂU THỨC HỮU TỈ THÀNH MỘT PHÂN THỨC

Sử dụng các quy tắc của các phép toán cộng, trừ, nhân, chia các phân thức ta có thể biến đổi một biểu thức hữu tỉ thành một phân thức.

Thí dụ 1: Biến đổi biểu thức sau thành một phân thức:

$$A = \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}}.$$

Giải

Ta có:

$$A = \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \left(1 + \frac{1}{x}\right) : \left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{x+1}{x} : \frac{x-1}{x} = \frac{x+1}{x-1}.$$

Chú ý: Khi biến đổi một biểu thức hữu tỉ trong nhiều trường hợp ta nhận được kết quả không phụ thuộc vào biến số, điều đó có nghĩa với yêu cầu " *Chứng minh rằng khi giá trị của biểu thức A được xác định thì nó không phụ thuộc vào biến*" sẽ được thực hiện bằng các phép biến đổi hữu tỉ đã biết. Để minh hoạ chúng ta xét thí dụ sau.

Thí dụ 2: Cho biểu thức:

$$A = \left(\frac{3}{x^2 - 1} + \frac{x+1}{2x-2} - \frac{x+3}{2x+2}\right) : \frac{5}{6x^2 - 6}.$$

a. Tìm điều kiện của x để biểu thức được xác định.

b. Chứng minh rằng khi giá trị của biểu thức được xác định thì nó không phụ thuộc vào giá trị của biến x.

Giải

a. Biểu thức được xác định với điều kiện:

$$\begin{cases} x^2 - 1 \neq 0 \\ 2x - 2 \neq 0 \\ 2x + 2 \neq 0 \\ 3x^2 - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \pm 1.$$

b. · Biến đổi biểu thức về dạng:

$$A = \left[\frac{3}{(x-1)(x+1)} + \frac{x+1}{2(x-1)} - \frac{x+3}{2(x+1)}\right].\frac{6(x^2-1)}{5}$$

$$= \left[\frac{6+(x+1)(x+1)-(x+3)(x-1)}{2(x-1)(x+1)}\right].\frac{6(x-1)(x+1)}{5}$$

$$= \frac{10}{2(x-1)(x+1)}.\frac{6(x-1)(x+1)}{5} = 6$$ - không phụ thuộc vào x.

2. GIÁ TRỊ CỦA PHÂN THỨC

Để tính giá trị của phân thức ứng với một giá trị cụ thể, giả sử x_0, ta cần:

- Kiểm tra x_0 thoả mãn điều kiện của biến.
- Tính giá trị của phân thức tại x_0 (*bằng cách thay vào biểu thức rút gọn*).

Thí dụ 3: Cho phân thức:

$$\frac{x-1}{x^2-1}.$$

a. Tìm điều kiện của x để phân thức được xác định.

b. Tính giá trị của phân thức tại x = - 7/8.

Giải

a. Phân thức được xác định với điều kiện:

$$x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1.$$

b. Ta có:

$$\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1}$$

và $x = -\frac{7}{8}$ thoả mãn điều kiện của biến nên giá trị của phân thức tại $x = -\frac{7}{8}$ bằng giá trị của phân thức rút gọn $\frac{1}{x+1}$ tại $x = -\frac{7}{8}$.

Vậy, giá trị của phân thức tại $x = -\frac{7}{8}$ bằng :

$$\frac{1}{-\frac{7}{8}+1} = \frac{8}{-7+8} = 8.$$

Chú ý: Với yêu cầu ngược lại, cụ thể " *Tìm giá trị của biến để giá trị của biểu thức A bằng a*" sẽ được thực hiện theo hai bước:

Bước 1: Tìm điều kiện của biến để biểu thức A được xác định.

Bước 2: Đơn giản biểu thức rồi thực hiện phép giải phương trình để tìm biến và đừng quên kiểm tra nó với điều kiện ở bước 1.

Thí dụ 4: Tìm giá trị của x để giá trị của biểu thức A bằng 0, biết:

$$A = \frac{x}{x+3} + \frac{3}{x-3} - \frac{6x}{9-x^2}.$$

Giải

Biểu thức được xác định với điều kiện:

$$\begin{cases} x+3 \neq 0 \\ x-3 \neq 0 \\ 9-x^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \pm 3. \qquad (*)$$

Biến đổi biểu thức về dạng:

$$A = \frac{x}{x+3} + \frac{3}{x-3} + \frac{6x}{x^2-9} = \frac{x}{x+3} + \frac{3}{x-3} + \frac{6x}{(x-3)(x+3)}$$

$$= \frac{x(x-3)+3(x+3)+6x}{(x-3)(x+3)} = \frac{x^2+6x+9}{(x-3)(x+3)}$$

$$= \frac{(x+3)^2}{(x-3)(x+3)} = \frac{x+3}{x-3}.$$

Từ đó, A = 0 khi và chỉ khi;

$$\frac{x+3}{x-3} = 0 \Leftrightarrow x+3 = 0 \Leftrightarrow x = -3,$$ không thoả mãn điều kiện (*).

Vậy, không có giá trị nào của x để biểu thức A có giá trị bằng 0.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Rút gọn biểu thức:

$$\frac{\dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x}}{\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{1+x}}.$$

Giải

Ta có:

$$\frac{\dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x}}{\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{1+x}} = \frac{1+x+1-x}{(1-x)(1+x)} : \frac{1+x-(1-x)}{(1-x)(1+x)}$$

$$= \frac{2}{(1-x)(1+x)} \cdot \frac{(1-x)(1+x)}{1+x-1+x}$$

$$= \frac{2(1-x)(1+x)}{2x(1-x)(1+x)} = \frac{1}{x}.$$

Ví dụ 2: Biến đổi các biểu thức sau thành một phân thức:

a. $A = (x^2 - 1)\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} + 1\right)$.

b. $B = \left(\frac{1}{x^2 + 2x + 1} - \frac{1}{x^2 - 2x + 1}\right) : \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right)$.

Giải

a. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Biến đổi:

$$A = (x - 1)(x + 1)\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} + 1\right) = (x - 1) - (x + 1) + (x^2 - 1)$$

$$= x^2 - 3.$$

Cách 2: Biến đổi:

$$A = (x^2 - 1).\frac{x - 1 - (x + 1) + x^2 - 1}{(x + 1)(x - 1)} = (x^2 - 1).\frac{x^2 - 3}{x^2 - 1} = x^2 - 3.$$

b. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Biến đổi:

$$B = \left[\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x-1)^2}\right] : \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right)$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right)\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\right)}{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$$

$$= \frac{(x - 1) + (x + 1)}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{2x}{x^2 - 1}.$$

Cách 2: Biến đổi:

$$B = \frac{(x^2 - 2x + 1) - (x^2 + 2x + 1)}{(x^2 + 2x + 1)(x^2 - 2x + 1)} : \frac{(x - 1) - (x + 1)}{(x + 1)(x - 1)}$$

$$= \frac{-4x}{(x + 1)^2(x - 1)^2}.\frac{(x + 1)(x - 1)}{-2} = \frac{2x}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{2x}{x^2 - 1}.$$

Ví dụ 3:

a. Biến đổi các biểu thức sau thành một phân thức:

$$1 + \frac{1}{x};\quad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}};\quad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}.$$

b. Hãy dự đoán kết quả của phép biến đổi biểu thức $1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}}}}}$ thành phân thức đại số và kiểm tra dự đoán đó.

Giải

a. Ta lần lượt có:

$$1 + \frac{1}{x} = \frac{x + 1}{x}$$

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{x + 1}{x}} = 1 + \frac{x}{x + 1} = \frac{2x + 1}{x + 1}$$

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{2x + 1}{x + 1}} = 1 + \frac{x + 1}{2x + 1} = \frac{3x + 2}{2x + 1}.$$

b. Ta dự đoán kết quả bằng $\frac{8x + 5}{5x + 3}$, thật vậy:

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}}}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{3x + 2}{2x + 1}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{3x + 2}{2x + 1}}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2x + 1}{3x + 2}} = 1 + \frac{3x + 2}{5x + 3} = \frac{8x + 5}{5x + 3}.$$

Ví dụ 4: Cho biểu thức:

$$A = \cfrac{1 + \cfrac{2}{x - 1}}{1 + \cfrac{2x}{x^2 + 1}}.$$

a. Biến đổi biểu thức thành một phân thức.

b. Tìm điều kiện của x để phân thức được xác định.

c. Tính giá trị của phân thức tại $x = 1$ và tại $x = \sqrt{2}$.

d. Tìm giá trị của x để giá trị của phân thức bằng 1.

Giải

a. Ta có:

$$A = \frac{1+\dfrac{2}{x-1}}{1+\dfrac{2x}{x^2+1}} = \left(1+\frac{2}{x-1}\right):\left(1+\frac{2x}{x^2+1}\right) = \frac{x-1+2}{x-1}:\frac{x^2+1+2x}{x^2+1}$$

$$= \frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{x^2+1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2+1}{x^2-1}.$$

b. Phân thức được xác định với điều kiện:

$x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1.$

c. Ta có:

- $x = 1$ không thoả mãn điều kiện của biến nên giá trị của phân thức không được xác định tại $x = 1$.
- $x = \sqrt{2}$ thoả mãn điều kiện của biến nên giá trị của phân thức tại $x = \sqrt{2}$ bằng $\dfrac{(\sqrt{2})^2+1}{(\sqrt{2})^2-1} = 3.$

d. Giá trị của phân thức bằng 1 khi và chỉ khi:

$\dfrac{x^2+1}{x^2-1} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 1 = x^2 - 1 \Leftrightarrow 1 = -1$, mâu thuẫn.

Vậy, không tồn tại giá trị của x để giá trị của phân thức bằng 1.

Ví dụ 5: Tìm giá trị nguyên của biến x để tại đó giá trị của mỗi biểu thức sau là một số nguyên:

a. $A = \dfrac{3}{x+1}$.   b. $B = \dfrac{x^2-4x+5}{x-3}$.

Giải

a. Với x nguyên, để giá trị của A là một số nguyên điều kiện là $x + 1$ phải là ước của 3, ta có bảng liệt kê sau:

x + 1	- 3	- 1	1	3
x	- 4	- 2	0	2

Vậy, với $x = -4$, $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$ thì A sẽ nhận giá trị nguyên.

b. Trước tiên, ta cần biến đổi biểu thức B về dạng (*chia tử cho mẫu*):

$$B = \frac{x^2-4x+5}{x-3} = x - 1 + \frac{2}{x-3}.$$

Với x nguyên, để giá trị của B là một số nguyên điều kiện là $x - 3$ phải là ước của 2, ta có bảng liệt kê sau:

x - 3	- 2	- 1	1	2
x	1	2	4	5

Vậy, với $x = 1$, $x = 2$, $x = 4$, $x = 5$ thì B sẽ nhận giá trị nguyên.

Ví dụ 6: Thực hiện các phép tính:

$$\frac{x+2}{2x-4}+\frac{2-3x}{x^3-4x}\cdot\frac{x^2-4}{x-2}$$

Giải

Ta có:

$$\frac{x+2}{2x-4}+\frac{2-3x}{x^3-4x}\cdot\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{x+2}{2(x-2)}+\frac{(2-3x)(x^2-4)}{x(x^2-4)(x-2)}$$

$$=\frac{x+2}{2(x-2)}+\frac{(2-3x)}{x(x-2)}=\frac{x(x+2)+2(2-3x)}{2x(x-2)}$$

$$=\frac{x^2+2x+4-6x}{2x(x-2)}=\frac{x^2-4x+4}{2x(x-2)}=\frac{(x-2)^2}{2x(x-2)}=\frac{x-2}{2x}.$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Biến đổi các biểu thức sau thành một phân thức:

a. $\dfrac{2+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}}{x+\dfrac{x}{x^2-1}}$.

b. $\dfrac{(x+\frac{1}{x})(x^3+\frac{1}{x^3})-(x^2+\frac{1}{x^2})^2}{(x-\frac{1}{x})(x^3-\frac{1}{x^3})-(x^2-\frac{1}{x^2})^2}$.

Bài tập 2. Cho phân thức:

$$\frac{x+1}{x^2+4x+3}.$$

a. Tìm điều kiện của x để phân thức được xác định.

b. Tính giá trị của phân thức tại x = 3 và tại x = 99997.

Bài tập 3. Tìm giá trị nguyên của biến x để tại đó giá trị của mỗi biểu thức sau là một số nguyên:

a. $A=\dfrac{6}{2x+1}$.

b. $B=\dfrac{2x^2-7x-1}{x-4}$.

c. $C=\dfrac{2x^3+x^2-6x}{2x+1}$.

Bài tập 4. Thực hiện phép tính:

a. $\dfrac{x+3}{2x-2}-\dfrac{4}{x^2-1}\cdot\dfrac{x+1}{2}$.

b. $\left(\dfrac{x}{x^2-4}+\dfrac{2}{2-x}+\dfrac{2}{x+2}\right):\dfrac{1}{x+2}$

c. $\left(\dfrac{x}{3x-9}+\dfrac{2x-3}{3x-x^2}\right)\cdot\dfrac{3x^2-9x}{x^2-6x+9}$.

Bài tập 5. Thực hiện phép tính:

a. $\left(\dfrac{a^2+b^2}{b}-a\right)\left(a-\dfrac{a^2}{a-b}\right):\dfrac{a^3+b^3}{a^2-b^2}$.

b. $\left(\dfrac{a}{a+1}+\dfrac{2}{a-1}-\dfrac{2a}{1-a^2}\right):(a+1)$.

Bài tập 6. Cho biểu thức:

$$A=\left(\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}\right):\frac{2x}{5x-5}.$$

a. Rút gọn biểu thức A.

b. Tìm giá trị của biểu thức A với $x = -1$.

c. Với giá trị nào của x thì $A = 2$?

Bài tập 7. Cho biểu thức:

$$B=(x^2-1)\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+1\right).$$

a. Rút gọn biểu thức B.

b. Chứng minh rằng với mọi giá trị của biến thuộc tập xác định, biểu thức B có giá trị dương.

Bài tập 8. Cho a, b là các số khác nhau, khác 0. Chứng minh:

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \text{ với } x=\frac{2ab}{a+b}$$

Bài tập 9. Tính $x^2+y^2+z^2-xyz$ với:

$$x=\frac{a}{b}+\frac{b}{a},\ y=\frac{b}{c}+\frac{c}{b},\ z=\frac{c}{a}+\frac{a}{c}.$$

IV. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. $\dfrac{2(x^2+x-1)}{x^3}$.

b. -1

Bài tập 2.

a. **Điều kiện phân thức được xác định là:**

$x^2+4x+3 \neq 0.$

Ta có:

$x^2+4x+3 = x^2+4x+4-1 = (x+2)^2-1 = (x+1)(x+3).$

Do đó:

$x^2+4x+3 \neq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x+3) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ và $x \neq -3$.

b. Trước hết ta viết lại phân thức dưới dạng:

$$\frac{x+1}{x^2+4x+3} = \frac{x+1}{(x+1)(x+3)} = \frac{1}{x+3}.$$

Khi đó:

- Tại x = 3, ta được $\frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$.
- Tại x = 99997, ta được $\frac{1}{99997+3} = \frac{1}{100000}$.

Bài tập 3.

a. Với x nguyên, để giá trị của A là một số nguyên điều kiện là 2x + 1 phải là ước của 6, ta có bảng liệt kê sau:

2x + 1	- 6	- 3	- 2	- 1	1	2	3	6
x	- 7/2	- 2	- 3/2	- 1	0	1/2	1	5/2

Vậy, với x = - 3, x = - 1, x = 1, x = 3 thì A sẽ nhận giá trị nguyên.

ÔN TẬP CHƯƠNG II

Bài tập 1. Chứng minh rằng:

a. $\frac{x+3}{x^2+5x+6} = \frac{1}{x+2}$.

b. $\frac{1}{x+4} = \frac{x^2+3x}{x^3+7x^2+12x}$.

Bài tập 2. Thực hiện phép tính:

a. $\left(\frac{8}{x^2-16} + \frac{1}{x+4}\right) : \left(\frac{x-4}{x^2+4x} - \frac{x}{2x+8}\right)$

b. $\left(\frac{3}{x+3} - \frac{3}{x-3}\right) . \frac{x^2-6x+9}{9}$.

c. $\left(\frac{3x}{2x+1} + \frac{2x}{2x-1}\right) : \frac{8x^2+10x}{1-4x+4x^2}$.

d. $\left(\frac{x}{25x^2-1} + \frac{5x-1}{5x^2+x}\right) : \frac{5x-1}{5x^2+x} + \frac{x}{5x-1}$

Bài tập 3. Thực hiện phép tính:

a. $\frac{x^3}{x+2} + \frac{x^3}{x-2} + \frac{8}{x+2} + \frac{4}{2-x}$.

b. $\frac{x+1}{x-2} + \frac{1-3x}{x^3+x} : \frac{x-1}{x^2+1}$.

Bài tập 4. Thực hiện phép tính:

a. $\left(\frac{y^2-xy}{x^3-x^2y+xy^2-y^3}+\frac{x}{x^2-y^2}\right):\left(\frac{1}{x+y}-\frac{2xy}{x^3+x^2y+xy^2+y^3}\right)$

b. $\left(\frac{x^2-3x}{2x^2+12}-\frac{2x^2}{18-6x+3x^2-x^3}\right)\cdot\frac{x^2+6}{x^3+9}$.

c. $\left[\left(\frac{x+1}{3x}-x-1\right)\cdot\frac{2}{x-1}-\frac{2}{3x}\right]\cdot\frac{2x}{x-1}$

Bài tập 5. Tính giá trị biểu thức:

a. $\left[\frac{x^2+1}{x^2}+\frac{2}{x+1}\left(\frac{1}{x}+1\right)\right]:\left(\frac{x+1}{x}\right)^2$.

b. $\left(\frac{x+3}{x^2+3}-\frac{x}{x^2-9}\right)\frac{x^2+3x}{2x+3}-\frac{x}{x-3}$.

c. $\left(\frac{2xy}{x^2-y^2}+\frac{x-y}{2x+2y}\right):\frac{x+y}{2x}-\frac{y}{x-y}$.

Bài tập 6. Tính giá trị biểu thức:

a. $\left(\frac{x^3}{2x+2}+1\right)\cdot\frac{1-x^2}{x}-\frac{8x+7}{2x^2-2}$.

b. $\frac{3x^2-14x+3}{x^2+3x}+\frac{1-x^2}{x}\left(\frac{x^2}{x+3}-1\right)$.

c. $\frac{y}{x-y}-\frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}\cdot\left(\frac{x}{(x-y)^2}-\frac{y}{x^2-y^2}\right)$.

Bài tập 7. Biến đổi các đẳng thức hữu tỉ thành phân thức:

a. $\dfrac{\frac{x+1}{2x}-\frac{2x}{x-1}}{\frac{x}{2(x+1)}-\frac{2(x-1)}{x}}$.

b. $\dfrac{\frac{5}{2}-\frac{5}{x+1}}{\frac{16-x^2}{x^2+2x+1}}$.

Bài tập 8. Tìm điều kiện của x để các biểu thức sau có nghĩa.

a. $\frac{x-1}{5x+16}$.

b. $\dfrac{\frac{3x-5}{3x+5}-1}{2x+5}$.

c. $\dfrac{\frac{x^2-9}{x}}{x^2+2x-3}$.

d. $\dfrac{\frac{3x^2-25}{2x^2+3x-5}}{x}$.

Bài tập 9. Tìm điều kiện của x để các biểu thức sau có nghĩa.

a. $\dfrac{2x-1}{\dfrac{x+1}{x-1}}$.

b. $\dfrac{x^3+3x^2+5x+19}{(x^2-4)(x+5)}$.

c. $\dfrac{5x+3y}{x^2+y^2+1}$.

d. $\dfrac{x^3m^2-xn^2}{x^2-(m-n)^2}$.

Bài tập 10. Tìm các giá trị của x.

a. $\dfrac{54-3x^2}{63+35x^2}=0$.

b. $\dfrac{-4-x^2+4x}{x^2+3x+18}=0$.

Bài tập 11. Tìm x, biết:

a. $\dfrac{2x-5}{\dfrac{x+1}{x-1}-1}=0$.

b. $\dfrac{\dfrac{3x-8}{3x+8}-1}{3x^2+1}-1=0$.

c. $\dfrac{\dfrac{x}{x^2-9}}{\dfrac{2x}{x^2+2x-3}}=0$.

d. $\dfrac{\dfrac{3x^2-25}{2x^2+3x-5}}{x}-3=0$.

Bài tập 12. Cho biểu thức:

$$A=\left(\frac{3(a+2)}{a^3+a^2+a+1}+\frac{2a^2-a-10}{a^3-a^2+a-1}\right):\left(\frac{5}{a^2+1}+\frac{3}{2a+2}-\frac{3}{2a-2}\right).$$

a. Rút gọn biểu thức.

b. Tìm giá trị của A với a = 2.

c. Tìm a để B = 0.

Bài tập 13. Cho biểu thức:

$$M=\left(\frac{x+2}{3x}+\frac{2}{x+1}-3\right):\frac{4x-2}{x+1}-\frac{1-x^2+3x}{3x}.$$

a. Rút gọn biểu thức M.

b. Tìm giá trị của M với x = 123.

c. Với giá trị nào của x thì M < 0.

d. Tìm giá trị của x để M đạt giá trị nguyên.

Bài tập 14. Chứng minh hằng đẳng thức:

$$\frac{x}{xy-2y^2}-\frac{2}{x^2+x-2xy-2y}\cdot\left(1+\frac{3x+x^2}{3+x}\right)=\frac{1}{y}.$$

Bài tập 15. Tìm GTLN hoặc GTNN của biểu thức:

a. $A = \frac{x^2}{x-2}\left(\frac{x^2+4}{x} - 4\right) + 3$.

b. $B = \frac{(x+2)^2}{x}\left(1 - \frac{x^2}{x+2}\right) - \frac{x^2+6x+4}{x}$.

Bài tập 16. Cho phân thức:

$$A = \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^3 - x}$$

a. Tìm tập xác định của phân thức.

b. Tìm giá trị của x để phân thức bằng 0.

c. Tìm giá trị nguyên của x để phân thức A có giá trị là số nguyên.

Bài tập 17. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến x thuộc tập xác định của biểu thức:

$$\left(\frac{1}{2-x} + \frac{3x}{x^2-4} - \frac{2}{2+x}\right) : \left(\frac{x^2+4}{4-x^2} + 1\right).$$

Bài tập 18. Chứng minh hằng đẳng thức:

$$\left(\frac{x}{xy-y^2} + \frac{2x-y}{xy-x^2}\right) : \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = \frac{x^2+y^2}{x^2+2xy+y^2}.$$

Bài tập 19. Tìm giá trị nguyên của x để phân thức sau có giá trị là một số nguyên. Tìm giá trị nguyên đó của phân thức.

a. $A = \frac{3x+21}{x+4}$.

b. $B = \frac{2x^3 - 7x^2 + 7x + 5}{2x-1}$.

Bài tập 20. Tìm giá trị nguyên của x để phân thức sau có giá trị là một số nguyên. Tìm giá trị nguyên đó của phân thức.

a. $A = \frac{x^3 - 5x^2 + 9x - 2}{x-3}$.

b. $B = \frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 7}{x^2+4}$.

Bài tập 21. Cho các số nguyên a, b, c khác 0 có tổng bằng 0. Tính giá trị của biểu thức:

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right).$$

Bài tập 22. Cho biết $a + b + c = 1$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$.

Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Bài tập 23. Cho n là số tự nhiên, $n \geq 2$.

a. Chứng minh hằng đẳng thức:

$$\frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

b. Rút gọn biểu thức:

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n}$$

c. Chứng minh:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < \frac{2}{3}.$$

Phần 2

Hình học

CHƯƠNG I - TỨ GIÁC

Trong chương này, chúng ta sẽ thu nhận được khái niệm về tứ giác và đi nghiên cứu chi tiết các tứ giác có dạng đặc biệt cùng với các phép đối xứng trục và đối xứng tâm, cụ thể:

1. **Hình thang**
2. **Đối xứng trục**
3. **Hình bình hành**
4. **Đối xứng tâm**
5. **Hình chữ nhật**
6. **Hình thoi**
7. **Hình vuông**

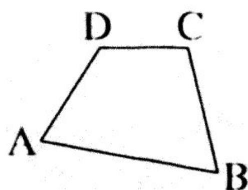
CHỦ ĐỀ 1

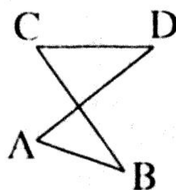
TỨ GIÁC

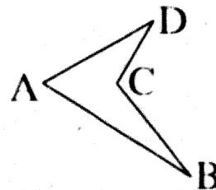
I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỊNH NGHĨA TỨ GIÁC

Định nghĩa: *Tứ giác ABCD là hình gồm bốn đoạn thẳng AB, BC, CD, DA, trong đó bất kì hai đoạn thẳng nào cũng không nằm trên một đường thẳng.*







Với tứ giác ABCD:

- Nó còn được gọi tên là tứ giác BCDA, BADC, ...
- Các điểm A, B, C, D gọi là các *đỉnh*.
- Các đoạn thẳng AB, BC, CD, DA gọi là các *cạnh*.

Chú ý: Từ định nghĩa tứ giác, ta thấy ngay tứ giác không thể có góc với số đo 180^0.

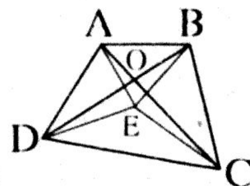
Định nghĩa tứ giác lồi: *Tứ giác lồi là tứ giác luôn nằm trong một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng chứa bất kì cạnh nào của tứ giác.*

Chú ý: Từ nay, khi nói đến tứ giác mà không chú thích gì thêm, ta hiểu đó là tứ giác lồi.

Thí dụ 1: Cho tứ giác ABCD. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Gọi E là điểm trong của ΔOCD. Hãy chỉ ra các tứ giác nhận bốn trong năm điểm A, B, C, D, E làm đỉnh.

Giải

Theo quy ước, ta hiểu các tứ giác được chỉ ra phải là tứ giác lồi.



- Bớt lại điểm E, ta có ABCD là tứ giác (lồi).
- Bớt lại điểm D, ta có ABCE là tứ giác (lồi).
- Bớt lại điểm C, ta có ABED là tứ giác (lồi).
- Bớt lại điểm B, ta có ACDE không là tứ giác lồi.
- Bớt lại điểm A, ta có BCDE không là tứ giác lồi.

Như vậy có ba tứ giác (tứ giác lồi ABCD, ABCE, ABED).

2. TỔNG CÁC GÓC TRONG MỘT TỨ GIÁC

Ta cần nhớ kết quả:

Tổng các góc trong một tứ giác bằng 360^0.

Yêu cầu: Các em học sinh hãy dựa trên tính chất tổng các góc trong một tam giác để chứng minh kết quả trên.

Thí dụ 2: Cho tứ giác ABCD có số đo các góc $\hat{A} = 90^0$, $\hat{B} = 110^0$, $\hat{C} = 60^0$. Tính số đo của góc $\hat{D}$.

Giải

Ta có:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^0$$

$$\Leftrightarrow \hat{D} = 360^0 - \hat{A} - \hat{B} - \hat{C} = 360^0 - 90^0 - 110^0 - 60^0 = 100^0.$$

Vậy, tứ giác ABCD có $\hat{D} = 100^0$.

Nhận xét: Từ kết quả về tổng các góc trong một tứ giác chúng ta sẽ trả lời được các câu hỏi sau:

1. *Có tứ giác nào bốn góc nhọn không? Vì sao ?*

   Trả lời: Không.

   Bởi vì, nếu giả sử trái lại các góc $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, $\hat{D}$ đều nhọn tức là

   $0 < \hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D} < 90^0$ thì

   $$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} < 90^0 + 90^0 + 90^0 + 90^0 < 360^0.$$

2. Có tứ giác nào không có góc tù không ?

   Trả lời: Có, thí dụ tứ giác có bốn góc vuông.

3. *Một tứ giác có nhiều nhất có mấy góc nhọn ?*

   Trả lời: Một tứ giác có nhiều nhất ba góc nhọn, thí dụ như tứ giác ABCD có $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 80^0$, $\hat{D} = 120^0$.

4. Nếu một tứ giác có ba góc nhọn thì góc còn lại là góc gì ?

   Trả lời: Một tứ giác có ba góc nhọn thì góc còn lại sẽ là góc tù, thật vậy giả sử các góc $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ nhọn (tức là $0 < \hat{A}, \hat{B}, \hat{C} < 90^0$), khi đó:

   $$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^0$$

   $$\Leftrightarrow \hat{D} = 360^0 - \hat{A} - \hat{B} - \hat{C} > 360^0 - 90^0 - 90^0 - 90^0 = 90^0$$

   $\Leftrightarrow$ góc $\hat{D}$ tù.

---

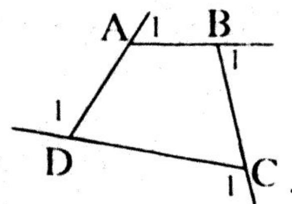
3. GÓC NGOÀI

Định nghĩa: *Góc kề bù với một góc của tứ giác gọi là góc ngoài của tứ giác.*

Ta cần nhớ kết quả:

Tổng các góc ngoài một tứ giác bằng 360^0.

Yêu cầu: Các em học sinh hãy dựa trên tính chất tổng các góc trong một tứ giác để chứng minh kết quả trên.



Thí dụ 3: Tính các góc ngoài của tứ giác ABCD, biết rằng các góc trong thoả mãn $\hat{A} : \hat{B} : \hat{C} : \hat{D} = 1 : 2 : 3 : 4$.

Giải

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau và tổng các góc của tứ giác, ta có:

$$\frac{\hat{A}}{1} = \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{C}}{3} = \frac{\hat{D}}{4} = \frac{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D}}{1 + 2 + 3 + 4} = \frac{360^0}{10} = 36^0,$$

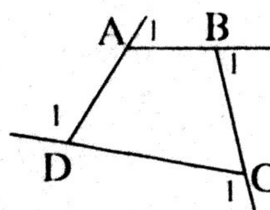
suy ra:

$\hat{A} = 36^0 \Rightarrow \hat{A}_1 = 180^0 - 36^0 = 144^0$,

$\hat{B} = 72^0 \Rightarrow \hat{B}_1 = 180^0 - 72^0 = 108^0$,

$\hat{C} = 108^0 \Rightarrow \hat{C}_1 = 180^0 - 108^0 = 72^0$,

$\hat{D} = 144^0 \Rightarrow \hat{D}_1 = 180^0 - 144^0 = 36^0$.



Chú ý: Chúng ta cũng có thể trình bày ví dụ trên theo cách:

Từ giải thiết ta được:

$\hat{B} = 2\hat{A}$, $\hat{C} = 3\hat{A}$, $\hat{D} = 4\hat{A}$.

Mặt khác, ta luôn có:

$360^0 = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = \hat{A} + 2\hat{A} + 3\hat{A} + 4\hat{A} = 10\hat{A}$

$\Leftrightarrow \hat{A} = 36^0$.

Khi đó, ta được:

$\hat{A} = 36^0 \Rightarrow \hat{A}_1 = 180^0 - 36^0 = 144^{-0}$,

$\hat{B} = 2\hat{A} = 72^0 \Rightarrow \hat{B}_1 = 180^0 - 72^0 = 108^{-0}$,

$\hat{C} = 3\hat{A} = 108^0 \Rightarrow \hat{C}_1 = 180^0 - 108^0 = 72^{-0}$,

$\hat{D} = 4\hat{A} = 144^0 \Rightarrow \hat{D}_1 = 180^0 - 144^0 = 36^{-0}$.

Nhận xét: Từ định nghĩa góc ngoài của tứ giác chúng ta có được tính chất " *Cho tứ giác ABCD bất kì tổng hai góc ngoài tại các đỉnh A và C bằng tổng hai góc trong tại các đỉnh B và D*", thật vậy:

$$\hat{A}_1 + \hat{C}_1 = (180^0 - \hat{A}) + (180^0 - \hat{C}) = 360^0 - (\hat{A} + \hat{C})$$
$$= 360^0 - (360^0 - \hat{B} - \hat{D}) = \hat{B} + \hat{D}.$$

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

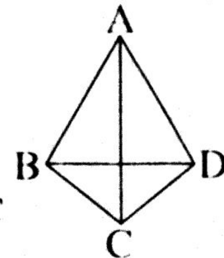
Ví dụ 1: Cho tứ giác ABCD có AB = AD, BC = CD.

a. Chứng minh rằng AC là đường trung trực của BD.

b. Biết $\hat{A} = 100^0$, $\hat{C} = 80^0$, tính $\hat{B}$, $\hat{D}$.

Giải

a. Từ giả thiết AB = AD và CB = CD nên AC là đường trung trực của đoạn thẳng BD.



b. Nhận xét rằng:

$\Delta ABC = \Delta ADC$ (c.c.c) $\Rightarrow \hat{B} = \hat{D}$.

Mặt khác, ta có:

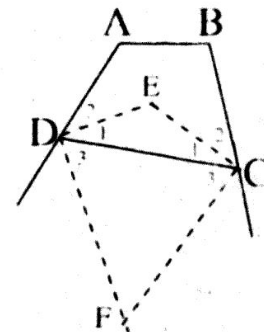
$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^0 \Leftrightarrow \hat{B} + \hat{D} = 360^0 - \hat{A} - \hat{C}$

$\Leftrightarrow 2\hat{B} = 360^0 - 100^0 - 80^0 = 180^0 \Leftrightarrow \hat{B} = 90^0$.

Vậy, $\hat{B} = \hat{D} = 90^0$.

Ví dụ 2: Cho tứ giác ABCD có $\hat{A} + \hat{B} = 160^0$. Các tia phân giác của các góc $\hat{C}$ và $\hat{D}$ cắt nhau ở E, các tia phân giác của các góc ngoài tại các đỉnh C và D cắt nhau ở F. Tính $\widehat{CED}$, $\widehat{CFD}$.

Giải



Từ giải thiết ta có:

$\hat{C}_1 = \frac{1}{2}\hat{C}$,

$\hat{D}_1 = \frac{1}{2}\hat{D}$,

suy ra:

$$\hat{C}_1 + \hat{D}_1 = \frac{1}{2}(\hat{C} + \hat{D}) = \frac{1}{2}[360^0 - (\hat{A} + \hat{B}) = \frac{1}{2}(360^0 - 160^0) = 100^0.$$

Trong ΔCDE, ta có:

$\widehat{CED} = 180^0 - (\hat{C}_1 + \hat{D}_1) = 180^0 - 100^0 = 80^0$.

Trong tứ giác CEDF, ta có:

$CE \perp CF \Rightarrow \widehat{ECF} = 90^0$,

$DE \perp DF \Rightarrow \widehat{EDF} = 90^0$,

$\widehat{CFD} = 360^0 - \widehat{CED} - \widehat{ECF} - \widehat{EDF}$

$= 360^0 - 80^0 - 90^0 - 90^0 = 100^0$.

Ví dụ 3: Cho tứ giác ABCD có $\hat{A} = 80^0$, $\hat{B} = 60^0$, góc ngoài tại D bằng 50^0.

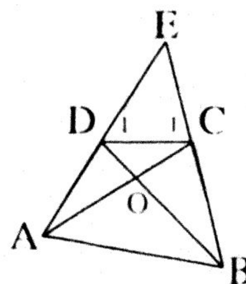
a. Tính góc $\hat{C}$ của tứ giác.

b. Cho biết AD = 2cm, BC = 3cm. Chứng minh rằng AC + BD > 5cm.

c. Dựng tứ giác ABCD thoả mãn các điều kiện trên.

Giải

a. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:



Cách 1: Trong tứ giác ABCD, ta có:

$$\widehat{D} = 180^0 - \widehat{D}_1 = 180^0 - 50^0 = 130^0.$$

$$\hat{C} = 360^0 - (\hat{A} + \hat{B} + \hat{D})$$

$$= 360^0 - (80^0 + 60^0 + 130^0) = 90^0.$$

Cách 2: Gọi E là giao điểm của AD và BC.

Trong ΔABE ta có:

$$\hat{E} = 180^0 - \hat{A} - \hat{B} = 180^0 - 80^0 - 60^0 = 40^0.$$

Xét ΔCDE có $\widehat{C}$ (ứng với $\widehat{BCD}$) là góc ngoài, do đó:

$$\widehat{C} = \hat{E} + \widehat{D}_1 = 40^0 + 50^0 = 90^0.$$

b. Gọi O là giao điểm của AC và BD, ta lần lượt có:

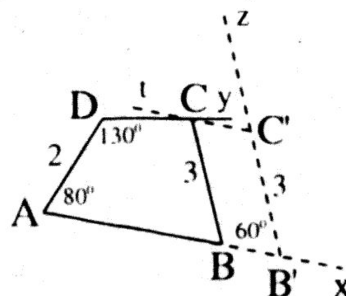
- Trong ΔOAD thì $OA + OD > AD$. (1)
- Trong ΔOBC thì $OB + OC > BC$. (2)

Cộng theo vế (1) và (2), ta được:

$$OA + OD + OB + OC > AD + BC \Leftrightarrow AC + BD > AD + BC = 5cm.$$

c. Để dựng tứ giác ABCD thoả mãn điều kiện đầu bài, ta lần lượt thực hiện:

- Dựng AD = 2cm.
- Dựng các góc $\widehat{DAx} = 80^0$, $\widehat{ADy} = 130^0$, với Ax và Dy nằm cùng phía đối với AD.



- Trên Ax lấy điểm B' bất kì. Dựng góc $\widehat{AB'z} = 60^0$, với B'z và AD nằm cùng phía đối với AB. Trên B'z lấy C' sao cho B'C' = 3cm.
- Dựng C't // Ax, cắt Dy ở C.
- Qua C dựng đường thẳng song song với B'C', cắt Ax ở B.

Khi đó ABCD là tứ giác phải dựng.

Chứng minh

Theo tính chất đoạn chắn song song, ta có ngay;

$$BC = B'C' = 3cm, \ \widehat{ABC} = \widehat{AB'z} = 60^0.$$

Tứ giác ABCD có AD = 2cm, BC = 3cm, $\hat{A} = 80^0$, $\hat{C} = 60^0$, góc ngoài tại D bằng 50^0, thoả mãn các điều kiện của bài toán.

Nhận xét: Trong lời giải trên:

1. Với câu a) ta có hai cách thực hiện:
   - Ở cách 1, ta sử dụng mối liện hệ giữa góc trong với góc ngoài và tính chất tổng các góc trong một tứ giác.
   - Ở cách 2, ta sử dụng tính chất tổng các góc trong một tam giác và tính chất góc ngoài của tam giác là " *Với tam giác, góc ngoài bằng tổng hai góc trong*

không kể chúng ". Hãy nhớ rằng, với tứ giác hiển nhiên điều này không đúng.

2. Với câu b) cho ta một nhận xét " *Tổng hai đường chéo của tứ giác lớn hơn tổng hai cạnh đối* ". Chúng ta sẽ chứng minh tính chất tổng quát này trong ví dụ tiếp theo.
3. Với câu c) cho ta một nhận xét " *Có thể dựng được tứ giác thông qua phép dựng đoạn thẳng, dựng góc và dựng các đường thẳng song song* ", đây là các phép dựng chúng ta đã biết khi dựng tam giác.

Ví dụ 4: Chứng minh rằng trong một tứ giác:

a. Tổng hai đường chéo lớn hơn tổng hai cạnh đối.

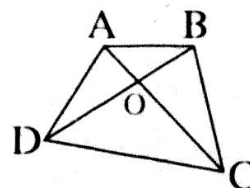
b. Tổng hai đường chéo lớn hơn nửa chu vi nhưng nhỏ hơn chu vi của tứ giác đó.

Giải

Với tứ giác ABCD bất kì, gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD.

a. Ta lần lượt có:

- Trong ΔOAB thì $OA + OB > AB$. (1)
- Trong ΔOCD thì $OC + OD > CD$. (2)



Cộng theo vế (1) và (2), ta được:

$$OA + OB + OC + OD > AB + CD$$

$$\Leftrightarrow AC + BD > AB + CD.$$

Chứng minh tương tự ta nhận được $AC + BD > AD + BC$.

b. Theo câu a), ta có:

$$AC + BD > AB + CD,$$

$$AC + BD > AD + BC.$$

suy ra:

$$2(AC + BD) > AB + CD + AD + BC = CV \text{ (đọc là chu vi)}$$

$$\Leftrightarrow AC + BD > \frac{1}{2}CV.$$

Tiếp theo ta lần lượt có:

- Trong ΔABC thì $AC < AB + BC$. (3)
- Trong ΔACD thì $AC < AD + CD$. (4)

Cộng theo vế (3) và (4), ta được:

$$2AC < AB + BC + AD + CD \Leftrightarrow AC < \frac{1}{2}CV. \quad (5)$$

Chứng minh tương tự ta nhận được $BD < \frac{1}{2}CV$. (6)

Từ (5) và (6) suy ra:

$$AC + BD < \frac{1}{2}CV + \frac{1}{2}CV = CV.$$

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Phát biểu định nghĩa tứ giác, tứ giác lồi. Vẽ hình minh hoạ.

Câu hỏi 2: Chứng minh rằng " *Tổng các góc trong tứ giác bằng* 180^0 ".

Câu hỏi 3: Phát biểu định nghĩa góc ngoài của tứ giác.

Câu hỏi 4: Chứng minh rằng " *Tổng các góc ngoài tứ giác bằng* 180^0 ".

Câu hỏi 5: Chứng minh rằng " *Cho tứ giác ABCD bất kì tổng hai góc ngoài tại các đỉnh A và C bằng tổng hai góc trong tại các đỉnh B và D* ".

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho tứ giác ABCD có AB = BC, AD = CD.

a. Chứng minh rằng BD là đường trung trực của AC.

b. Biết $\hat{B} = 110^0$, $\hat{D} = 80^0$, tính $\hat{A}$, $\hat{C}$.

Bài tập 2. Cho tứ giác ABCD có ba góc ngoài tại đỉnh A, B, C theo thứ tự bằng 30^0, 70^0, 100^0. Tính góc trong D của tứ giác.

Bài tập 3. Tứ giác ABCD có $\hat{A} = 100^0$, $\hat{B} = 120^0$. $\hat{C} - \hat{D} = 20^0$. Tính $\hat{C}$ và $\hat{D}$.

Bài tập 4. Tính các góc trong của tứ giác ABCD, biết rằng các góc ngoài thoả mãn $\hat{A}_1 : \hat{B}_1 : \hat{C}_1 : \hat{D}_1 = 1 : 2 : 3 : 4$.

Bài tập 5. Cho tứ giác ABCD bất kì. Chứng minh rằng tổng hai góc trong tại các đỉnh A và C bằng tổng hai góc ngoài tại các đỉnh B và D.

Bài tập 6. Cho tứ giác ABCD có $\hat{A} + \hat{B} = 200^0$. Các tia phân giác của các góc $\hat{C}$ và $\hat{D}$ cắt nhau ở E, các tia phân giác của các góc ngoài tại các đỉnh C và D cắt nhau ở F. Tính $\widehat{CED}$, $\widehat{CFD}$.

Bài tập 7. Cho tứ giác ABCD có $\hat{A} = 90^0$, $\hat{B} = 60^0$, góc ngoài tại đỉnh D bằng 60^0.

a. Tính góc $\hat{C}$ của tứ giác.

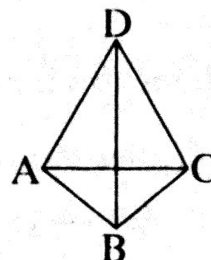
b. Cho biết AD = 3cm, BC = 4cm. Chứng minh rằng AC + BD > 7cm.

c. Dựng tứ giác ABCD thoả mãn các điều kiện trên.

Bài tập 8. Dựng tứ giác ABCD biết AC = 4cm, AB = 2cm, BC = 2,5cm, CD = 3,5cm, DA = 2,5cm.

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1.



a. Từ giả thiết AB = BC và AD = CD nên BD là đường trung trực của đoạn thẳng AC.

b. Nhận xét rằng:

$$\Delta ABD = \Delta CBD \text{ (c.c.c)} \Rightarrow \hat{A} = \hat{C}.$$

Mặt khác, ta có:

$$\hat{A} + B + C + D = 360^0 \Leftrightarrow \hat{A} + C = 360^0 - B - D$$
$$\Leftrightarrow 2\hat{A} = 360^0 - 110^0 - 80^0 = 170^0 \Leftrightarrow B = 85^0.$$

Vậy, $\hat{A} = C = 85^0$.

Bài tập 2. 160^0.

Bài tập 3. Ta có:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^0 \Leftrightarrow \hat{C} + \hat{D} = 360^0 - \hat{A} - \hat{B} = 140^0.$$

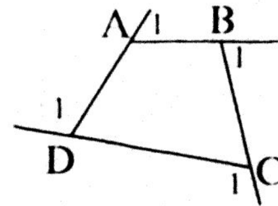
Dựa trên giả thiết $\hat{C} - \hat{D} = 20^0$, suy ra $\hat{C} = 80^0$, $\hat{D} = 60^0$.

Bài tập 4. Theo tính chất dẫy tỉ số bằng nhau và tổng các góc ngoài của tứ giác, ta có:

$$\frac{\hat{A}_1}{1} = \frac{\hat{B}_1}{2} = \frac{\hat{C}_1}{3} = \frac{\hat{D}_1}{4} = \frac{\hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{C}_1 + \hat{D}_1}{1 + 2 + 3 + 4} = \frac{360^0}{10} = 36^0,$$

suy ra:

$$\hat{A}_1 = 36^0 \Rightarrow \hat{A} = 180^0 - 36^0 = 144^0,$$
$$\hat{B}_1 = 72^0 \Rightarrow \hat{B} = 180^0 - 72^0 = 108^0,$$
$$\hat{C}_1 = 108^0 \Rightarrow \hat{C} = 180^0 - 108^0 = 72^0,$$
$$\hat{D}_1 = 144^0 \Rightarrow \hat{D} = 180^0 - 144^0 = 36^0.$$



Bài tập 5. Ta có:

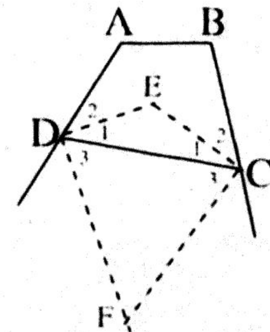
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^0$$
$$\Leftrightarrow \hat{A} + \hat{C} = 360^0 - \hat{B} - \hat{D} = (180^0 - \hat{B}) + (180^0 - \hat{D}) = \hat{B}_1 + \hat{D}_1$$

Bài tập 6. Từ giả thiết ta có:

$$\hat{C}_1 = \frac{1}{2}\hat{C} \text{ và } \hat{D}_1 = \frac{1}{2}\hat{D},$$

suy ra:

$$\hat{C}_1 + \hat{D}_1 = \frac{1}{2}(\hat{C} + \hat{D}) = \frac{1}{2}[360^0 - (\hat{A} + \hat{B})$$
$$= \frac{1}{2}(360^0 - 200^0) = 80^0.$$



Trong ΔCDE, ta có:

$$\widehat{CED} = 180^0 - (\hat{C}_1 + \hat{D}_1) = 180^0 - 80^0 = 100^0.$$

Trong tứ giác CEDF, ta có:

$$CE \perp CF \Rightarrow \widehat{ECF} = 90^0,$$
$$DE \perp DF \Rightarrow \widehat{EDF} = 90^0,$$
$$\widehat{CFD} = 360^0 - \widehat{CED} - \widehat{ECF} - \widehat{EDF} = 360^0 - 100^0 - 90^0 - 90^0 = 80^0.$$

Bài tập 7. Xem ví dụ 3.

Bài tập 8. Hướng dẫn:

- Dựng ΔABC biết ba cạnh AB; BC, AC.
- Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B, xác định điểm D bằng hai cung tròn đỉnh A và đỉnh C.

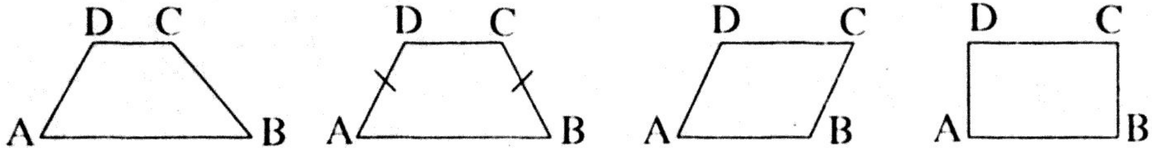
CHỦ ĐỀ 2

HÌNH THANG

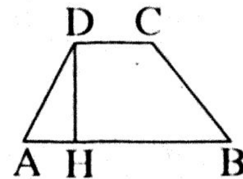
I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỊNH NGHĨA

Hình thang là tứ giác có hai cạnh đối song song .



Với hình thang ABCD (hình bên), ta có các định nghĩa:



- Các đoạn thẳng AB và CD gọi là *cạnh đáy* (AB là *đáy lớn* và CD là *đáy nhỏ*).
- Các đoạn thẳng AD và BC gọi là *cạnh bên*.
- DH là một đường cao của hình thang.

Nhận xét: Từ định nghĩa hình thang chúng ta có được các nhận xét:

1. *Tổng hai góc kề một cạnh bên của hình thang bằng 180^0*. Và dựa vào nhận xét này ta trả lời được câu hỏi " *Hình thang có nhiều nhất bao nhiêu góc tù? Có nhiều nhất bao nhiêu góc nhọn ? Vì sao ?*", thật vậy:

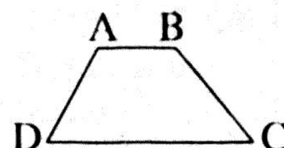
   Xét hình thang ABCD (AB // CD), ta có:
   - Hai góc $\hat{A}$ và $\hat{D}$ bù nhau nên trong hai góc ấy, có nhiều nhất một góc tù, có nhiều nhất một góc nhọn.
   - Cũng vậy đối với hai góc $\hat{B}$ và $\hat{C}$.

   Vậy hình thang có nhiều nhất hai góc tù, có nhiều nhất hai góc nhọn.
2. *Nếu một hình thang có hai cạnh bên song song thì hai cạnh bên bằng nhau, hai cạnh đáy bằng nhau.*
3. *Nếu một hình thang có hai cạnh đáy bằng nhau thì hai cạnh bên song song và bằng nhau.*

Thí dụ 1: Tính các góc của hình thang ABCD (AB // CD), biết $\hat{A} = 3\hat{D}$ và $\hat{B} - \hat{C} = 30^0$.

Giải

Vì ABCD là hình thang với AB // CD, ta có:



$$180^0 = \hat{A} + \hat{D} = 3\hat{D} + \hat{D} = 4\hat{D}$$

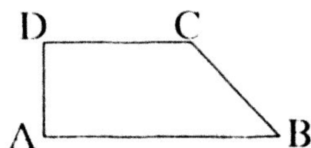
$$\Leftrightarrow \hat{D} = 45^0 \Rightarrow \hat{A} = 135^0.$$

$$180^0 = \bar{B} + \bar{C} \overset{\bar{B}-\bar{C}=30^0}{=} (30^0 + \bar{C}) + \bar{C} = 30^0 + 2\bar{C}$$

$$\Leftrightarrow \bar{C} = 75^0 \Rightarrow \bar{B} = 105^0.$$

2. HÌNH THANG VUÔNG

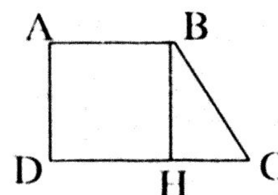
Hình thang vuông là hình thang có một góc vuông .



Thí dụ 2: Hình thang vuông ABCD có $\hat{A} = \bar{D} = 90^0$, AB = AD = 2cm, CD = 4cm. Tính các góc $\bar{B}$, $\bar{C}$ của hình thang.

Giải

Kẻ BH vuông góc với CD, khi đó hình thang ABHD có hai cạnh bên song song nên:



BH = AD = 2cm,

DH = AB = 2cm

$\Rightarrow$ CH = CD — DH = 4 — 2 = 2cm.

Khi đó, ta có nhận xét ΔHBC vuông cân tại H, suy ra:

$$\bar{C} = 45^0 \Rightarrow \bar{B} = 180^0 - \bar{C} = 180^0 - 45^0 = 135^0.$$

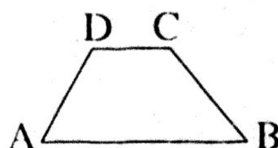
II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho hình thang ABCD. Tính các góc $\bar{B}$ và $\bar{D}$ biết $\hat{A} = 60^0$ và $\bar{C} = 130^0$.

Giải

Vì $\hat{A}$ và $\bar{C}$ là hai góc đối nhau của hình thang, do đó ta có hai trường hợp hình như sau:

<u>Với $\hat{A}$ và $\bar{B}$ là hai góc kề một cạnh đáy</u>

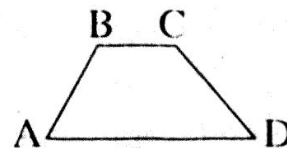


Khi đó:

$\bar{D} = 180^0 - \hat{A} = 120^0$,

$\bar{B} = 180^0 - \bar{C} = 50^0$.

<u>Với $\hat{A}$ và $\bar{B}$ là hai góc kề một cạnh bên</u>



Khi đó:

$\bar{B} = 180^0 - \hat{A} = 120^0$.

$\bar{D} = 180^0 - \bar{C} = 50^0$.

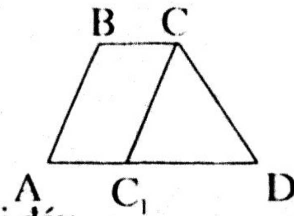
<u>Chú ý</u>: Rất nhiều học sinh khi thực hiện ví dụ trên chỉ xét 1 trong 2 trường hợp.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng tổng hai cạnh bên hình thang lớn hơn hiệu hai đáy.

Giải

Với hình thang ABCD, kẻ CC_1 song song với AB, khi đó hình thang $ABCC_1$ có hai cạnh bên song song nên:

$AB = CC_1$ và $AC_1 = BC$.



Trong ACC_1D, ta có:

$CC_1 + CD > C_1D$

$\Leftrightarrow AB + CD > AD - AC_1 = AD - BC.$

Vậy, tổng hai cạnh bên hình thang lớn hơn hiệu hai đáy.

Nhận xét: Như vậy, trong ví dụ trên chúng ta đã sử dụng:

- Phép dựng đường phụ để chuyển bài toán tứ giác về tam giác.
- Hệ quả về " *Hình thang có hai cạnh bên song song với nhau* ".

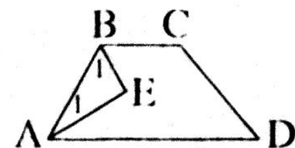
Ví dụ 3: Chứng minh rằng trong hình thang các tia phân giác của hai góc kề một cạnh bên vuông góc với nhau.

Giải

Ta cần chứng minh $AE \perp BE \Leftrightarrow \widehat{AEB} = 90^0$.

Từ giac thiết, ta có:

$\hat{A}_1 = \frac{1}{2}\hat{A}$,



$\hat{B}_1 = \frac{1}{2}\hat{B}$,

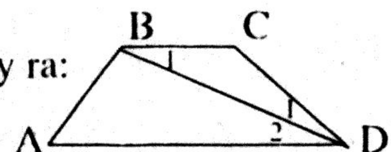
Thật vậy, trong ΔEAB ta có:

$$\widehat{AEB} = 180^0 - (\hat{A}_1 + \hat{B}_1) = 180^0 - \frac{1}{2}(\hat{A} + \hat{B}) = 180^0 - 90^0 = 90^0.$$

Yêu cầu: Các em học sinh hãy trả lời thêm câu hỏi " *Với hình thang ABCD (AD // BC) khi nào đường phân giác góc $\hat{A}$ vuông góc với đường phân giác góc D* ".

Ví dụ 4: Tứ giác ABCD có BC = CD và BD là tia phân giác của góc $\hat{D}$. Chứng minh rằng ABCD là hình thang.

Giải



Từ giả thiết BD là tia phân giác của góc $\hat{D}$, suy ra:

$\hat{D}_1 = \hat{D}_2$.

Từ giả thiết BC = CD, suy ra ΔBCD cân tại C

$\Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1 = \hat{D}_2 \Leftrightarrow BC // AD$ (có hai góc so le trong bằng nhau)

$\Leftrightarrow$ ABCD là hình thang.

Yêu cầu: Như vậy, để chứng minh tứ giác ABCD là hình thang ta chỉ có 1 cách đó là sử dụng định nghĩa, điều này tương đương với việc chứng minh hai đoạn thẳng song song.

Các em học sinh hãy nhắc lại xem có bao nhiêu cách để chứng minh hai đoạn thẳng song song.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Phát biểu định nghĩa hình thang. Vẽ hình minh hoạ.

Câu hỏi 2: Phát biểu định nghĩa hình thang vuông. Vẽ hình minh hoạ.

Câu hỏi 3: Biết ít nhất mấy góc của hình thang là tính được các góc còn lại ?

IV.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Tính các góc của hình thang ABCD (AB // CD), biết $\hat{A} = 2\hat{D}$ và $\hat{B} - \hat{C} = 20^0$.

Bài tập 2. Hình thang vuông ABCD có $\hat{A} = \hat{D} = 90^0$, AB = AD = 3cm, CD = 6cm. Tính các góc $\hat{B}$, $\hat{C}$ của hình thang.

Bài tập 3. Hình thang vuông ABCD có $\hat{A} = \hat{D} = 90^0$, AB = 16cm, BC = 10cm, CD = 24cm. Tính độ dài đoạn AD.

Bài tập 4. Cho hình thang ABCD. Tính các góc $\hat{B}$ và $\hat{D}$ biết $\hat{A} = 50^0$ và $\hat{C} = 120^0$.

Bài tập 5. Tứ giác ABCD có AB = BC và AC là tia phân giác của góc $\hat{A}$. Chứng minh rằng ABCD là hình thang.

Bài tập 6. Cho ΔABC, các tia phân giác của các góc B và C cắt nhau tại I. Qua I kẻ đường thẳng song song với BC, cắt các cạnh AB và AC tại D và E.

a. Hãy vẽ hình và tìm các hình thang trong hình vẽ.

b. Chứng minh rằng hình thang BCED có một cạnh đáy bằng tổng hai cạnh bên.

Bài tập 7. Cho ΔABC có BC = 4cm, các trung tuyến BD, CE. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của BE, CD. Gọi giao điểm của MN với BD, CE theo thứ tự là P, Q.

a. Tính độ dài MN.

b. Chứng minh rằng MP = PQ = QN.

Bài tập 8. Hình thang vuông ABCD có $\hat{A} = \hat{D} = 90^0, \hat{C} = 45^0$. Biết đường cao bằng 4cm, AB + CD = 10cm, tính hai đáy.

Bài tập 9. Cho một hình thang có hai đáy không bằng nhau.

a. Chứng minh rằng tổng hai góc ở đáy lớn thì nhỏ hơn 180^0.

b. Có nhận xét gì về tổng hai góc ở đáy nhỏ?

Bài tập 10. Cho hình thang ABCD (AB // CD), tia phân giác của góc C đi qua trung điểm M của AD. Chứng minh rằng:

a. $\widehat{BMC} = 90^0$.

b. BC = AB + CD.

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1. Vì ABCD là hình thang với AB // CD, ta có:

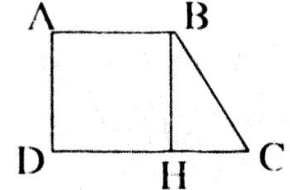
$$180^0 = \hat{A} + \hat{D} = 2\hat{D} + \hat{D} = 3\hat{D} \Leftrightarrow \hat{D} = 60^0 \Rightarrow \hat{A} = 120^0.$$

$$180^0 = \hat{B} + \hat{C} \overset{\hat{B}-\hat{C}=20^0}{=} (20^0 + \hat{C}) + \hat{C} = 20^0 + 2\hat{C}$$

$$\Leftrightarrow \hat{C} = 80^0 \Rightarrow \hat{B} = 100^0.$$

Vậy, ta được $\hat{A} = 120^0$, $\hat{B} = 100^0$, $\hat{C} = 80^0$ và $\hat{D} = 60^0$.

Bài tập 2. Kẻ BH vuông góc với CD, khi đó hình thang ABHD có hai cạnh bên song song nên:



BH = AD = 3cm,

DH = AB = 3cm

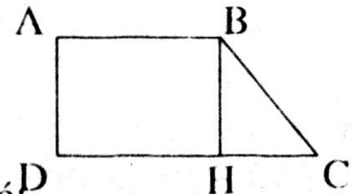
$\Rightarrow$ CH = CD - DH = 6 - 3 = 3cm.

Khi đó, ta có nhận xét ΔHBC vuông cân tại H, suy ra:

$$\hat{C} = 45^0 \Rightarrow \hat{B} = 180^0 - \hat{C} = 180^0 - 45^0 = 135^0.$$

Vậy, ta được $\hat{B} = 135^0$, $\hat{C} = 45^0$.

Bài tập 3. Kẻ BH vuông góc với CD, khi đó hình thang ABHD có hai cạnh bên song song nên:



BH = AD,

DH = AB = 16cm

$\Rightarrow$ CH = CD - DH = 24 - 16 = 8cm.

Xét ΔHBC vuông tại H, theo định lí Pitago ta có:

$$BH^2 = BC^2 - CH^2 = 10^2 - 8^2 = 36 \Leftrightarrow BH = 6cm.$$

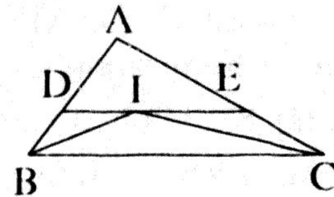
Vậy, ta được AD = 6cm.

Bài tập 4. Có hai trường hợp:

- Nếu AB // CD thì $\hat{B} = 60^0$ và $\hat{D} = 130^0$.
- Nếu AD // BC thì $\hat{B} = 130^0$ và $\hat{D} = 60^0$.

Bài tập 5. Dựa trên ví dụ 4.

Bài tập 6.



a. Trong hình vẽ ta có các hhình thang sau:

BCID, BCEI, BCED.

b. Ta lần lượt xét:

- Xét ΔBDI, ta có:

$\widehat{DIB} = \widehat{IBC}$ (so le trong) và $\widehat{IBC} = \widehat{IBD}$ (vì IB là phân giác)

$\Rightarrow \widehat{DIB} = \widehat{IBD} \Leftrightarrow$ ΔBDI cân tại D $\Leftrightarrow$ BD = ID. (1)

- Xét ΔCEI, ta có:

$\widehat{EIC} = \widehat{ICB}$ (so le trong) và $\widehat{ICB} = \widehat{ICE}$ (vì IC là phân giác)

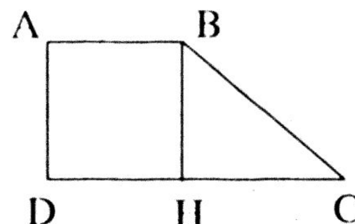
$\Rightarrow \widehat{EIC} = \widehat{ECI} \Leftrightarrow$ ΔCEI cân tại E $\Leftrightarrow$ CE = IE. (2)

Từ (1) và (2), suy ra:

$BD + CE = ID + IE = DE$, dpcm.

Bài tập 7. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 8. Kẻ BH vuông góc với CD, khi đó hình thang ABHD có hai cạnh bên song song nên:



$BH = AD = 4cm,$

$DH = AB.$

Nhận xét ΔHBC vuông cân tại H, suy ra:

$CH = BH = 4cm.$

Từ giả thiết:

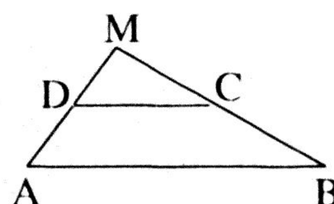
$10cm = AB + CD = DH + DH + CH = 2DH + 4 \Leftrightarrow DH = 3cm.$

$\Rightarrow AB = DH = 3cm$ và $CD = DH + CH = 3 + 4 = 7cm.$

Vậy, ta được $AB = 3cm$, $CD = 7cm$.

Bài tập 9.

a. Xét hình thang ABCD (AB // CD), ta cần đi chứng minh $\hat{A} + \hat{B} < 180^0$.



Thật vậy:

- Vì AB > CD nên AD cắt BC tại M.
- Xét ΔMAB, ta có:

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{M} = 180^0 \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{B} = 180^0 - \hat{M}$

$\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} < 180^0$, dpcm.

b. Ta có:

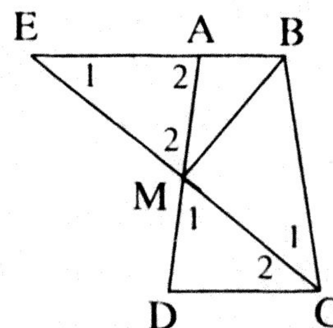
$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^0$

$\Leftrightarrow \hat{C} + \hat{D} = 360^0 - (\hat{A} + \hat{B}) > 360^0 - 180^0 = 180^0.$

Vậy, tổng hai góc ở đáy nhỏ thì lớn hơn 180^0.

Bài tập 10.

a. Giả sử CM cắt tia BA tại E.



Xét hai tam giác ΔCMD và ΔEMA, ta có:

$\hat{M}_1 = \hat{M}_2$, đối đỉnh

$DM = AM$, giả thiết

$\hat{D} = \hat{A}_2$, so le trong

suy ra:

$\Delta CMD = \Delta EMA$ (g.c.g) $\Rightarrow CM = EM$ và $CD = AE$.

Xét ΔBCE, ta có:

$\hat{C}_1 = \hat{C}_2 = \hat{E}_1$ (phân giác và so le trong) $\Rightarrow \Delta BCE$ cân tại B

do đó, trung tuyến BM cũng chính là đường cao, nên $\widehat{BMC} = 90^0$.

b. Ta có:

$BC = BE = AB + AE = AB + CD$, dpcm.

CHỦ ĐỀ 3

HÌNH THANG CÂN

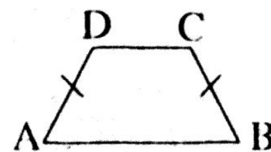
I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỊNH NGHĨA

Hình thang cân là hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau.

Với ABCD là hình thang cân, ta có:

$$\hat{A} = \hat{B},\ \hat{C} = \hat{D}.$$



Vậy, tứ giác ABCD là hình thang cân

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AB // CD \\ \hat{A} = \hat{B} \text{ hoặc } \hat{C} = \hat{D} \end{cases}.$$

Thí dụ 1: Tính các góc của hình thang cân ABCD (AB // CD), biết $\hat{D} = 2\hat{A}$.

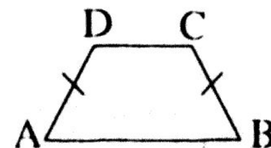
Giải

Từ giả thiết ta có:

$180^0 = \hat{A} + \hat{D} = \hat{A} + 2\hat{A} = 3\hat{A}$

$\Leftrightarrow \hat{A} = 60^0 = \hat{B}$

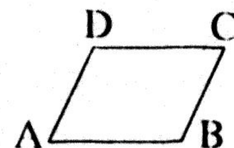
$\Rightarrow \hat{C} = \hat{D} = 2\hat{A} = 120^0$.



2. CÁC TÍNH CHẤT CỦA HÌNH THANG CÂN

***Định lí 1**: Trong hình thang cân, hai cạnh bên bằng nhau.*

Chú ý: Điều ngược lại của định lí trên không đúng, cụ thể " *Có những hình thang có hai cạnh bên bằng nhau nhưng không phải là hình thang cân* " - Hình vẽ.



***Định lí 2**: Trong hình thang cân, hai đường chéo bằng nhau.*

Chú ý: Điều ngược lại của định lí trên vẫn đúng, cụ thể " *Hình thang có hai đường chéo bằng nhau là hình thang cân* ".

3. CÁC DẤU HIỆU NHẬN BIẾT HÌNH THANG CÂN

1. *Hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau là hình thang cân.*
2. *Hình thang có hai đường chéo bằng nhau là hình thang cân.*

Thí dụ 2:

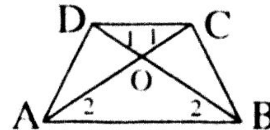
a. Hình thang cân ABCD (AB // CD), gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Chứng minh rằng OA = OB, OC = OD.

b. Cho tứ giác ABCD. Gọi O là giao điểm của hai đoạn thẳng AC và BD, biết OA = OB, OC = OD. Chứng minh rằng ABCD là hình thang cân.

Giải

a. Với hai tam giác ΔACD và ΔBDC, ta có:

- CD chung
- $\widehat{ADC} = \widehat{BCD}$
- AD = BC



do đó ΔACD = ΔBDC (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{D}_1 \Leftrightarrow$ ΔOCD cân tại O $\Rightarrow$ OC = OD.

Vì AC = BD nên ta cũng có OA = OB.

b. Từ giả thiết ta có ngay AC = BD.

Trong ΔOAB cân tại O, ta có:

$\hat{A}_2 = \widehat{B}_2$,

$180^0 = A\hat{O}B + \hat{A}_2 + \widehat{B}_2 = A\hat{O}B + 2\hat{A}_2 \Rightarrow \hat{A}_2 = \frac{1}{2}(180^0 - A\hat{O}B)$. (1)

Trong ΔOCD cân tại O, ta có:

$\widehat{C}_1 = \widehat{D}_1$,

$180^0 = C\hat{O}D + \widehat{C}_1 + \widehat{D}_1 = A\hat{O}B + 2\widehat{C}_1 \Rightarrow \widehat{C}_1 = \frac{1}{2}(180^0 - A\hat{O}B)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$\hat{A}_2 = \widehat{C}_1 \Rightarrow$ AB // CD (có hai góc so le trong bằng nhau).

Vậy, tứ giác ABCD có AB // CD và AC = BD do đó nó là hình thang cân.

Nhận xét: Như vậy, thông qua thí dụ trên chúng ta thu nhận thêm được một dấu hiệu để nhận biết một tứ giác là hình thang cân. - *Đề nghị các em học sinh phát biểu lại dấu hiệu này.*

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1:

a. Cho hình thang cân ABCD có đáy lớn AB = a, đáy nhỏ CD = b, đường cao DH. Chứng minh rằng:

$$HA = \frac{1}{2}(a - b) \text{ và } HB = \frac{1}{2}(a + b).$$

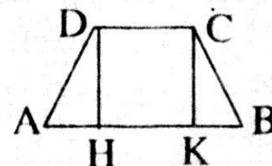
b. Áp dụng, tính đường cao của hình thang cân có hai đáy 8cm, 24cm và cạnh bên 17cm.

Giải

a. Kẻ CK vuông góc với AB, ta có ngay:

ΔHAD = ΔKBC (cạnh huyền và góc nhọn bằng nhau)

$\Rightarrow$ AH = BK.



Hình thang CDHK có hai cạnh bên DH và CK song song nên HK = CD.

Từ đó ta có nhận xét:

AB = AH + HK + KB = 2HA + CD

$\Leftrightarrow HA = \frac{1}{2}(AB - CD) = \frac{1}{2}(a - b)$

$HB = AB - HA = a - \frac{1}{2}(a - b) = \frac{1}{2}(a + b).$

b. Sử dụng kết quả câu a), ta có $HA = \frac{1}{2}(26 - 10) = 8cm$

Trong ΔHAD vuông tại H, ta có:

$DH^2 = AD^2 - AH^2 = 17^2 - 8^2 = 225 \Leftrightarrow DH = 15cm.$

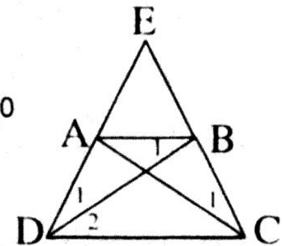
Ví dụ 2: Cho hình thang cân ABCD có đường chéo BD vuông góc với cạnh bên BC, BD là tia phân giác của góc D. Tính chu vi của hình thang, biết BC = a.

Giải

Ta có ngay AD = BC = a.

Vì BD là tia phân giác của góc D nên :

$\hat{D}_1 = \hat{D}_2 = \hat{B}_1 \Rightarrow \Delta ABD$ cân tại A $\Rightarrow AB = AD = a.$



Trong ΔBCD vuông tại B, ta có:

$90^0 = \hat{C} + \hat{D}_2 = \hat{D} + \hat{D}_2 = 3\hat{D}_2 \Leftrightarrow \hat{D}_2 = 30^0$

$\Rightarrow CD = 2BC = 2a.$

Vậy, ta được:

$CV_{ABCD} = AB + BC + CD + DA = 5a.$

Ví dụ 3: Cho ΔABC cân tại A, các đường phân giác BD, CE (với $D \in AC$, $E \in AB$).

a. Chứng minh rằng BEDC là hình thang cân có đáy nhỏ bằng cạnh bên.

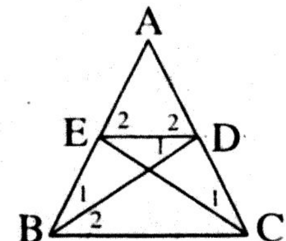
b. Tính các góc của hình thang BEDC, biết $\hat{A} = 50^0$.

Giải

a. Trong ΔABC cân tại A, ta có:

$\hat{B} = \hat{C},$

$180^0 = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A} + 2\hat{B} \Leftrightarrow \hat{B} = \frac{1}{2}(180^0 - \hat{A}).$ (1)



Với hai tam giác ΔABD và ΔACE, ta có:

- Góc $\hat{A}$ chung
- AB = AC
- $\hat{B}_1 = \hat{C}_1 = \frac{1}{2}\hat{C}$

do đó $\Delta ABD = \Delta ACE$ (g.c.g) $\Rightarrow AD = AE \Leftrightarrow \Delta ADE$ cân tại A.

Trong ΔADE cân tại A, ta có:

$\hat{E}_2 = \hat{D}_2,$

$180^0 = \hat{A} + \hat{E}_2 + \hat{D}_2 = \hat{A} + 2\hat{E}_2 \Leftrightarrow \hat{E}_2 = \frac{1}{2}(180^0 - \hat{A}).$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$\hat{B} = \hat{E}_2 \Rightarrow BC // DE$ (có hai góc đồng vị bằng nhau)

Vậy, tứ giác BEDC có BC // DE và $\hat{B} = \hat{C}$ do đó nó là hình thang cân.

Mặt khác, ta cũng có:

$\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \hat{D}_1$

$\Rightarrow \Delta EBD$ cân tại E $\Rightarrow ED = EB$ (đáy nhỏ bằng cạnh bên).

b. Ta lần lượt có:

$$\hat{B} = \hat{C} = \frac{1}{2}(180^0 - \hat{A}) = 65^0.$$

$$\hat{E} = \hat{D} = 180^0 - \hat{B} = 115^0.$$

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Phát biểu định nghĩa hình thang cân. Vẽ hình minh hoạ.

Câu hỏi 2: Có hình thang cân nào có hai cạnh bên song song không ?

Câu hỏi 3: Phát biểu các tính chất của hình thang cân.

Câu hỏi 4: Một hình thang cân có một góc bằng 110^0. Đó là góc ở đáy nào: đáy lớn hay đáy nhỏ? Tính các góc còn lại.

Câu hỏi 5: Hai góc của một hình thang cân có hiệu bằng 30^0. Đó là hai góc ở một đáy hay hai góc ở một cạnh bên? Tính các góc của hình thang.

Câu hỏi 6: Phát biểu các dấu hiệu nhận biết hình thang cân.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Tính các góc của hình thang cân ABCD (AB // CD), biết :

a. $\hat{D} = 3\hat{A}$.

b. $\hat{A} = 50^0$.

Bài tập 2. Tính đường cao của hình thang cân có hai đáy 8cm, 14cm và cạnh bên 5cm.

Bài tập 3. Đường cao phát xuất từ đỉnh góc tù của một hình thang cân chia đáy lớn thành hai đoạn thẳng có độ dài 6cm và 30cm. Tính độ dài của đáy nhỏ.

Bài tập 4. Cho hình thang cân ABCD có đường chéo BD vuông góc với cạnh bên BC, BD là tia phân giác của góc D. Tính chu vi của hình thang, biết BC = 6cm.

Bài tập 5. Cho hình thang cân ABCD, gọi O là giao điểm của hai đường chéo, kéo dài AD và BC cắt nhau tại E. Chứng minh rằng OE là đường trung trực của hai đáy.

Bài tập 6. Cho hình thang cân ABCD, có đáy nhỏ AB bằng cạnh bên AD. Chứng minh rằng AC là tia phân giác của góc C.

Bài tập 7. Cho ΔABC cân tại A. Gọi D, E theo thứ tự thuộc các cạnh bên AB, AC sao cho AD = AE.

a. Tứ giác BDEC là hình gì ? Chứng minh.

b. Tính các góc của hình thang BEDC, biết $\hat{A} = 70^0$.

c. Các điểm D, E ở vị trí nào thì BD = DE = EC ?

Bài tập 8. Hình thang cân ABCD (AB // CD) có $\hat{C} = 60^0$, DB là phân giác của góc D. Biết chu của hình thang bằng 20cm. Tính mỗi cạnh của hình thang.

Bài tập 9. Cho hình thang ABCD (AB // CD). Chứng minh rằng ABCD là hình thang cân khi và chỉ khi $\widehat{ACD} = \widehat{BDC}$

Bài tập 10. Một hình thang có hai cạnh bên bằng nhau có phải là hình thang cân không ? Từ đó suy ra mệnh đề: " *Hình thang là cân khi và chỉ khi hai cạnh bằng nhau* " đúng hay sai ?

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1. Ta có $\hat{A} = \hat{B}$ và $\hat{D} = \hat{C}$.

Mặt khác:

$$\hat{A} + \hat{D} = 180^0.$$

a. Với $\hat{D} = 3\hat{A}$, ta được:

$$180^0 = \hat{A} + 3\hat{A} = 4\hat{A} \Leftrightarrow \hat{A} = 45^0 \Rightarrow \hat{D} = 135^0.$$

Vậy, ta được $\hat{A} = \hat{B} = 45^0$, $\hat{D} = \hat{C} = 135^0$.

b. Với $\hat{A} = 50^0$, ta được:

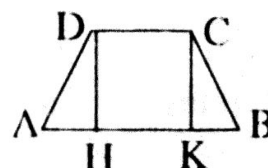
$$180^0 = 50^0 + \hat{D} \Leftrightarrow \hat{D} = 130^0 \Rightarrow \hat{A} = 50^0.$$

Vậy, ta được $\hat{A} = \hat{B} = 50^0$, $\hat{D} = \hat{C} = 130^0$.

Bài tập 2. Kẻ CK và DH vuông góc với AB, ta có ngay:

$\Delta HAD = \Delta KBC$ (cạnh huyền và góc nhọn bằng nhau)

$\Rightarrow AH = BK$.



Hình thang CDHK có hai cạnh bên DH và CK song song nên HK = CD.

Từ đó ta có nhận xét:

$$AB = AH + HK + KB = 2HA + CD$$

$$\Leftrightarrow HA = \frac{1}{2}(AB - CD) = \frac{1}{2}(14 - 8) = 3cm$$

Trong ΔHAD vuông tại H, ta có:

$$DH^2 = AD^2 - AH^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Leftrightarrow DH = 4cm.$$

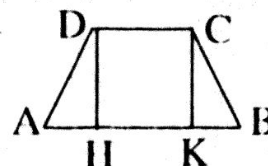
Bài tập 3. Kẻ CK và DH vuông góc với AB, ta có ngay:

$\Delta HAD = \Delta KBC$ (cạnh huyền và góc nhọn bằng nhau)

$\Rightarrow AH = BK$.

Hình thang CDHK có hai cạnh bên DH và CK song song nên:

$$CD = HK = AK - AH$$
$$= AK - BK = 30 - 6 = 24cm.$$

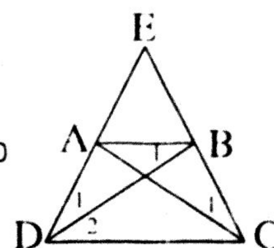


Bài tập 4. Ta có ngay AD = BC = 6cm.

Vì BD là tia phân giác của góc D nên :

$\hat{D}_1 = \hat{D}_2 = B_1$

$\Rightarrow \Delta ABD$ cân tại A $\Rightarrow$ AB = AD = 6cm.



Trong ΔBCD vuông tại B, ta có:

$90^0 = \hat{C} + \hat{D}_2 = \hat{D} + \hat{D}_2 = 3\hat{D}_2 \Leftrightarrow \hat{D}_2 = 30^0$

$\Rightarrow$ CD = 2BC = 12cm.

Vậy, ta được:

CV_{ABCD} = AB + BC + CD + DA = 6 + 6 + 12 + 6 = 30cm.

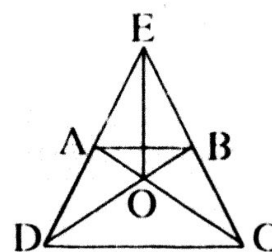
Bài tập 5.

a. Ta có:

EA = EB, vì ΔEAB cân tại E.

OA = OB, vì ΔOAB cân tại O.

do đó OE là đường trung trực của AB.



b. Ta có:

EC = ED, vì ΔECD cân tại E.

OC = OD, vì ΔOCD cân tại O.

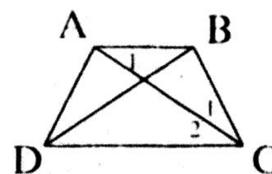
do đó OE là đường trung trực của CD.

Bài tập 6. Xét ΔABC, ta có:

AB = AD = BC $\Leftrightarrow \Delta ABC$ cân tại B

$\Leftrightarrow \hat{C}_1 = \hat{A}_1 = \hat{C}_2$

$\Leftrightarrow$ AC là tia phân giác của góc C.

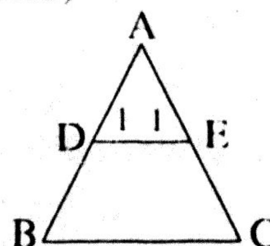


Bài tập 7.

a. Vì hai tam giác ΔABC và ΔADE đều cân tại A và có goác $\hat{A}$ chung nên:

$B = \hat{D}_1 \Rightarrow$ BC // DE (có hai góc đồng vị bằng nhau)

Vậy, tứ giác BEDC có BC // DE và B = C do đó nó là hình thang cân.



b. Trong hình thang BEDC, ta lần lượt có:

$B = \hat{C} = \dfrac{1}{2}(180^0 - \hat{A}) = 55^0.$

$E = \bar{D} = 180^0 - \bar{B} = 125^0.$

Bài tập 8. Đặt BC = a, ta có ngay AD = BC = a.

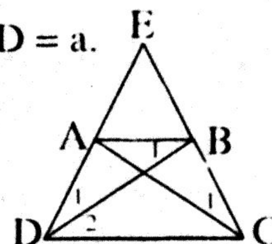
Vì BD là tia phân giác của góc D nên :

$\hat{D}_1 = \hat{D}_2 = B_1 \Rightarrow \Delta ABD$ cân tại A $\Rightarrow$ AB = AD = a.

Trong ΔBCD vuông tại B, ta có:

$90^0 = \hat{C} + \hat{D}_2 = \hat{D} + \hat{D}_2 = 3\hat{D}_2 \Leftrightarrow \hat{D}_2 = 30^0$

$\Rightarrow$ CD = 2BC = 2a.



Vậy, ta được:

$CV_{ABCD} = 20 \Leftrightarrow$ AB + BC + CD + DA = 20 $\Leftrightarrow$ 5a = 20 $\Leftrightarrow$ a = 4cm.

Như vậy, ta được AD = BC = AB = 4cm và CD = 8cm.

CHỦ ĐỀ 4 ĐƯỜNG TRUNG BÌNH CỦA TAM GIÁC

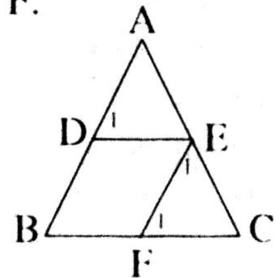
I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỊNH NGHĨA

Bài toán: *Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh của tam giác và song song với cạnh thứ hai thì đi qua trung điểm cạnh thứ ba.*

Chứng minh

Gọi D là trung điểm của AB, đường thẳng qua D song song với BC cắt AC tại E, ta cần chứng minh E là trung điểm AC.



Qua E kẻ đường thẳng song song với AB cắt BC tại F.

Hình thang BDEF có hai cạnh bên song song nên

EF = BD.

Với hai tam giác ΔADE và ΔEFC, ta có:

- AD = EF, vì cùng bằng BD
- $\hat{A} = \hat{E}_1$, vì là hai góc đồng vị
- $\hat{D}_1 = \hat{F}_1$, vì cùng bằng $\hat{B}$

do đó ΔADE = ΔEFC (g.c.g) ⇒ AE = EC, tức là E là trung điểm AC.

Chú ý: Khi đó, ta gọi DE là *đường trung bình* của ΔABC.

***Định nghĩa** : Đường trung bình của tam giác là đoạn nối trung điểm hai cạnh của tam giác.*

2. TÍNH CHẤT

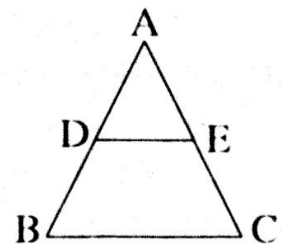
Ta có kết quả sau:

***Định lí**: Đường trung bình của tam giác thì song song với cạnh thứ ba và bằng nửa cạnh ấy.*

Như vậy, ta có:

$$\begin{cases} AD = BD \\ AE = CE \end{cases} \Leftrightarrow DE \overset{//}{=} \frac{1}{2}BC.$$

$$\begin{cases} AD = BD \\ DE \,//\, BC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AE = CE \\ DE = \frac{1}{2}BC \end{cases}.$$

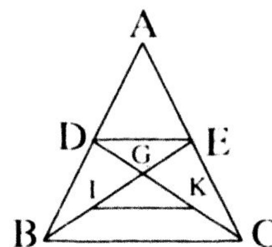


Thí dụ 1: Cho ΔABC, các đường trung tuyến BE và CD cắt nhau tại G. Gọi I, K theo thứ tự là trung điểm của GB, GC. Chứng minh rằng DE song song và bằng IK.

Giải

Vì BD, CE là các đường trung tuyến nên:

$$\begin{cases} AD = BD \\ AE = CE \end{cases} \Leftrightarrow DE \overset{//}{=} \frac{1}{2} BC. \quad (1)$$



Trong ΔGBC, ta có:

$$\begin{cases} GI = BI \\ GK = CK \end{cases} \Leftrightarrow IK \overset{//}{=} \frac{1}{2} BC. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra $IK \overset{//}{=} DE$.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho ΔABC, đường trung tuyến AM.

a. Lấy điểm D thuộc AC sao cho DC = 2AD, gọi I là giao điểm của BD và AM. Chứng minh rằng AI = MI.

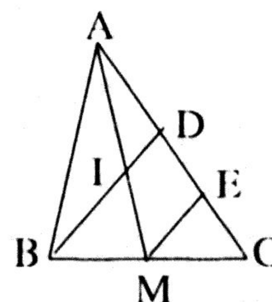
b. Gọi I là trung điểm của AM, D là giao điểm của BI và AC. Chứng minh rằng DC = 2AD.

Giải

Gọi E là trung điểm của CD.

Trong ΔBCD, ta có:

$$\begin{cases} BM = CM \\ DE = CE \end{cases} \Rightarrow ME // BD.$$



a. Trong ΔAME, ta có:

$$\begin{cases} AD = ED \\ DI // EM \end{cases} \Rightarrow AI = MI.$$

b. Trong ΔAME, ta có:

$$\begin{cases} AI = MI \\ DI // EM \end{cases} \Rightarrow AD = ED = EC \Rightarrow DC = 2AD.$$

Nhận xét: Như vậy, trong ví dụ trên:

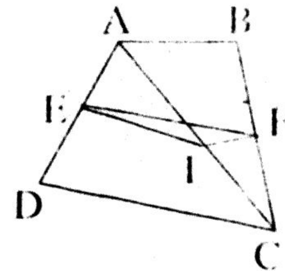
- Việc sử dụng thêm điểm phụ E cho phép chúng ta chứng minh được rất nhanh AI = MI.
- Nội dung của câu a) và câu b) là hai chiều ngược nhau (do đó có thể phát biểu dưới dạng khi và chỉ khi).

<u>Ví dụ 2:</u> Cho tứ giác ABCD, gọi E, F, I theo thứ tự là trung điểm của AD, BC, AC. Chứng minh rằng:

a. EI // CD và FI // AB.

b. $EF < \dfrac{AB + CD}{2}$.

Giải



a. Trong ΔACD, ta có:

$$\begin{cases} AI = CI \\ AE = DE \end{cases} \Leftrightarrow EI \overset{//}{=} \frac{1}{2} CD.$$

Trong ΔABC, ta có:

$$\begin{cases} AI = CI \\ BF = CF \end{cases} \Leftrightarrow FI \overset{//}{=} \frac{1}{2} AB.$$

b. Trong ΔEFI, ta có:

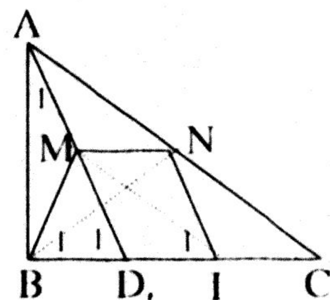
$$EF \le EI + FI = \frac{1}{2} CD + \frac{1}{2} AB = \frac{AB + CD}{2}.$$

<u>Ví dụ 3:</u> Cho ΔABC vuông tại B, $\hat{A} = 60^0$, phân giác AD. Gọi M, N, I theo thứ tự là trung điểm của AD, AC, CD.

a. Chứng minh rằng BMNI là hình thang cân.

b. Tính các góc của tứ giác BMNI.

Giải



a. Trong ΔACD, ta có:

$$\begin{cases} AM = DM \\ AN = CN \end{cases} \Rightarrow MN // CD$$

$\Rightarrow$ MN // BI $\Rightarrow$ BMNI là hình thang.

Tiếp theo để chứng minh BMNI là hình thang cân ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Chứng minhhai góc kề một đáy bằng nhau

Trong ΔABD vuông tại B có BM là trung tuyến nên

MD = MB $\Rightarrow$ ΔMBD cân tại M $\Rightarrow$ $\hat{B}_1 = \hat{D}_1$. (1)

Trong ΔACD, ta có:

$$\begin{cases} AN = CN \\ DI = CI \end{cases} \Rightarrow NI // AD \Rightarrow \hat{I}_1 = \hat{D}_1. \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $\hat{B}_1 = \hat{I}_1$, tức là BMNI là hình thang cân.

Cách 2: Chứng minh hai đường chéo bằng nhau

Trong ΔABC vuông tại B có BN là trung tuyến nên $BN = \dfrac{1}{2} AC$. (3)

Trong ΔACD, ta có:

$$\begin{cases} AM = DM \\ CI = DI \end{cases} \Rightarrow MI = \frac{1}{2}AC. \quad (4)$$

Từ (3), (4) suy ra BN = NI, tức là BMNI là hình thang cân.

b. Ta có:

$$\hat{A} = 60^0 \Leftrightarrow \hat{A}_1 = 30^0$$

suy ra:

$$B_1 = I_1 = D_1 = 90^0 - \hat{A}_1 = 60^0,$$

$$M = N = 180^0 - B_1 = 120^0.$$

Nhận xét: Như vậy, ví dụ lại cung cấp thêm cho chúng ta một phương pháp khác để chứng minh tứ giác ABCD là hình thang cân.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho hình thang ABCD (AB // CD), gọi E, F, I theo thứ tự là trung điểm của AD, BC, AC. Chứng minh rằng ba điểm E, F, I thẳng hàng.

Bài tập 2. Cho tứ giác ABCD, gọi E, F, I theo thứ tự là trung điểm của AD, BC, AC. Chứng minh rằng ABCD là hình thang biết ba điểm E, F, I thẳng hàng.

Bài tập 3. Cho hình thang ABCD (AB // CD), gọi E, F, I, K theo thứ tự là trung điểm của AD, BC, AC, BD. Tính độ dài các đoạn EK, KI, IF biết:

a. AB = 12cm và CD = 16cm.

b. AB = 8cm và CD = 6cm.

Bài tập 4. Cho tứ giác ABCD có AB = 2a và CD = 2b. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AD, BC. Chứng minh rằng $EF \leq a + b$.

Bài tập 5. Cho ΔABC vuông tại B, phân giác AD. Gọi M, N, I theo thứ tự là trung điểm của AD, AC, CD. Tính các góc của tứ giác BMNI, biết:

a. $\hat{A} = 30^0$.

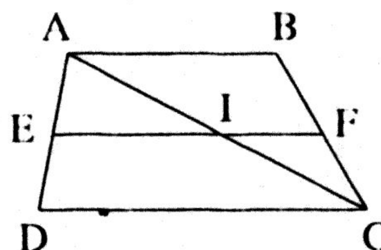
b. $\hat{A} = 70^0$.

IV. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 2. Ta lần lượt có:

- Trong ΔACD, ta có:

$$\begin{cases} AI = CI \\ AE = DE \end{cases} \Rightarrow EI // CD // AB.$$



- Trong ΔABC, ta có:

$$\begin{cases} AI = CI \\ BF = CF \end{cases} \Rightarrow FI // AB.$$

Vậy, ba điểm E, F, I thẳng hàng.

Bài tập 3. Chứng minh tiếp tuyến như bài 1, ta có EI // CD và FI // AB.

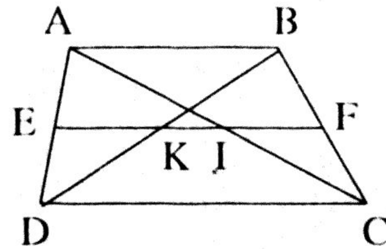
Vì ba điểm E, F, I thẳng hàng nên:

AB // CD ⇒ ABCD là hình thang.

Bài tập 4.

a. Ta có ngay:

$$EF = \frac{1}{2}(AB + CD) = 14cm.$$



Trong ΔABD, ta có:

$$\begin{cases} AE = DE \\ BK = DK \end{cases} \Rightarrow EK = \frac{1}{2}AB = 6cm.$$

Trong ΔABC, ta có:

$$\begin{cases} AI = CI \\ BF = CF \end{cases} \Rightarrow FI = \frac{1}{2}AB = 6cm.$$

Vì ba điểm E, F, I thẳng hàng nên

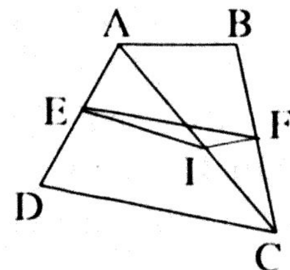
KI = EF - EK - FI = 14 - 6 - 6 = 2cm.

b. Thực hiện tương tự (lưu ý cần vẽ lại hình bởi AB > CD).

Bài tập 5. Trước tiên ta lần lượt có:

- Trong ΔACD, ta có:

$$\begin{cases} AI = CI \\ AE = DE \end{cases} \Rightarrow EI = \frac{1}{2}CD = b.$$



- Trong ΔABC, ta có:

$$\begin{cases} AI = CI \\ BF = CF \end{cases} \Rightarrow FI = \frac{1}{2}AB = a.$$

Khi đó, trong ΔEFI, ta có:

EF ≤ EI + FI = a + b, đpcm.

CHỦ ĐỀ 5

ĐƯỜNG TRUNG BÌNH CỦA HÌNH THANG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỊNH NGHĨA

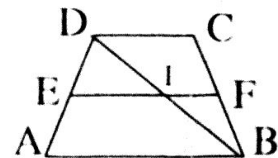
Bài toán: *Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh bên của hình thang và song song với hai đáy thì đi qua trung điểm cạnh bên thứ hai.*

Chứng minh

Gọi E là trung điểm của AD, đường thẳng qua E song song với AB cắt BD và BC theo thứ tự tại I, F, ta cần chứng minh F là trung điểm BC.

Trong ΔABD, ta có:

$$\begin{cases} AE = DE \\ EI \parallel AB \end{cases} \Rightarrow DI = BI.$$



Trong ΔBCD, ta có:

$$\begin{cases} DI = BI \\ IF \parallel CD \end{cases} \Rightarrow BF = CF, \text{ tức là F là trung điểm BC.}$$

Chú ý: Khi đó, ta gọi EF là *đường trung bình* của hình thang ABCD.

***Định nghĩa** : Đường trung bình của hình thang là đoạn nối trung điểm hai cạnh bên của hình thang.*

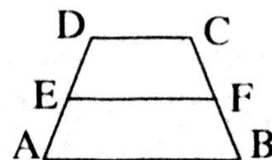
2. TÍNH CHẤT

Ta có kết quả sau:

***Định lí:** Đường trung bình của hình thang thì song song với hai đáy và bằng nửa tổng hai đáy.*

Như vậy, ta có:

$$\begin{cases} AE = DE \\ BF = CF \end{cases} \Leftrightarrow EF \overset{\parallel}{=} \frac{1}{2}(AB + CD).$$



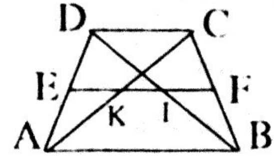
$$\begin{cases} AE = DE \\ EF \parallel AB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} BF = CF \\ EF = \frac{1}{2}(AB + CD) \end{cases}.$$

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho hình thang ABCD (AB // CD), gọi E, F, I, K theo thứ tự là trung điểm của AD, BC, AC, BD. Tính độ dài các đoạn EK, KI, IF biết AB = 18cm và CD = 12cm.

Giải

Trong ΔBCD, ta có:



$$\begin{cases} DI = BI \\ CF = BF \end{cases} \Rightarrow FI = \frac{1}{2}CD = 6cm.$$

Trong ΔACD, ta có:

$$\begin{cases} DE = AE \\ DI = BI \end{cases} \Rightarrow EK = \frac{1}{2}CD = 6cm.$$

Trong hình thang ABCD, ta có:

$$\begin{cases} DE = AE \\ CF = BF \end{cases} \Rightarrow EF = \frac{1}{2}(AB + CD) = 15cm.$$

Khi đó, ta nhận được IK = EF - EK - FI = 3cm.

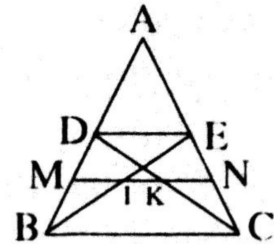
Nhận xét: Với độ dài IK, ta có nhận xét.

$$IK = 3cm = \frac{1}{2}(AB - CD) \text{ và } IK // AB // CD$$

tức là " *đoạn thẳng nối trung điểm của hai đường chéo của hình thang thì song song với hai đáy và có độ dài bằng nửa hiệu độ dài của hai đáy* ".

Ví dụ 2: Cho ΔABC, các đường trung tuyến BE và CD. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của BD, CE. Gọi I, K theo thứ tự là giao điểm của MN với BE, CD. Chứng minh rằng MI = IK = KN.

Giải



Vì BD, CE là các đường trung tuyến nên:

$$\begin{cases} AD = BD \\ AE = CE \end{cases} \Rightarrow DE = \frac{1}{2}BC.$$

Trong hình thang BCED, ta có:

$$\begin{cases} BM = DM \\ CN = EN \end{cases} \Rightarrow MN // BC // DE \text{ và } MN = \frac{1}{2}(BC + DE) = \frac{3}{4}BC.$$

Trong ΔBDE, ta có:

$$\begin{cases} BM = DM \\ MI // DE \end{cases} \Rightarrow MI = \frac{1}{2}DE = \frac{1}{4}BC. \quad (1)$$

Trong ΔCDE, ta có:

$$\begin{cases} CN = EN \\ NK // DE \end{cases} \Rightarrow NK = \frac{1}{2}DE = \frac{1}{4}BC. \quad (2)$$

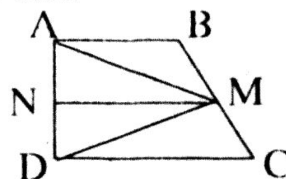
Khi đó, ta nhận được:

$$IK = MN - MI - NK = \frac{3}{4}BC - \frac{1}{4}BC - \frac{1}{4}BC = \frac{1}{4}BC. \ (3)$$

Vậy, từ (1), (2), (3) ta được $MI = IK = KN = \frac{1}{4}BC$.

Ví dụ 3: Cho hình thang vuông ABCD ($\hat{A} = \hat{D} = 90^0$), gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng ΔMAD là tam giác cân.

Giải



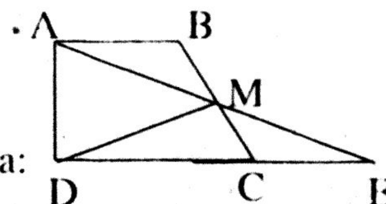
Ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Gọi N là trung điểm của AD.

Trong hình thang ABCD, ta có:

$$\begin{cases} AN = DN \\ BM = CM \end{cases} \Rightarrow MN \parallel AB \parallel CD \Rightarrow MN \perp AD.$$

Trong ΔMAD có MN vừa là trung tuyến, vừa là đường cao, suy ra ΔMAD là tam giác cân.



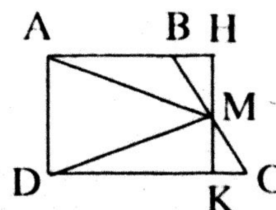
Cách 2: Gọi E là giao điểm của AM và CD, ta có:

ΔABM = ΔECM (g.c.g) ⇒ MA = ME.

Trong ΔADE vuông có DM là trung tuyến suy ra:

DM = MA ⇒ ΔMDE cân.

Cách 3: Qua M dựng đường thẳng vuông góc với AB và cắt AB, CD theo thứ tự tại H, K, ta có:



ΔMHB = ΔMKC (cạnh huyền và góc nhọn)

⇒ MH = MK.

⇒ ΔMHA = ΔMKD (c.g.c)

⇒ AM = DM ⇒ ΔMDE cân.

Yêu cầu: Các em học sinh hãy đánh giá 3 cách giải trên.

Ví dụ 4: Cho hình thang ABCD (AB // CD) có AB = a, BC = b, CD = c, DA = d. Các đường phân giác của các góc ngoài đỉnh A và D cắt nhau tại M, các đường phân giác của các góc ngoài đỉnh B và C cắt nhau tại N.

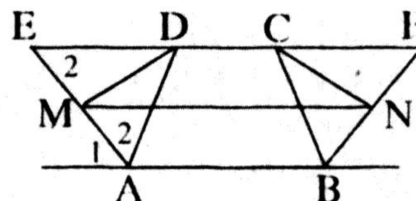
a. Chứng minh rằng MN // AB.

b. Tính độ dài MN theo a, b, c, d.

Giải

a. Giả sử AM và BN cắt CD theo thứ tự tại E, F.

Nhận xét rằng:



$\hat{E}_2 = \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \Rightarrow$ ΔADE cân tại D

$$\Rightarrow \begin{cases} DE = AD = d \\ AM = EM \end{cases}.$$

Chứng minh tương tự, ta cũng nhận được CF = CB = b và BN = FN.

Trong hình thang ABFE, ta có:

$$\begin{cases} AM = EM \\ BN = FN \end{cases} \Rightarrow MN \parallel AB.$$

b. Ta có ngay:

$$MN = \frac{1}{2}(AB + EF) = \frac{1}{2}(AB + ED + DC + CF) = \frac{1}{2}(a + b + c + d).$$

Yêu cầu: Các em học sinh hãy cho biết nếu không sử dụng thêm hai điểm E, F thì có thể thực hiện được yêu cầu của bài toán không ?

Ví dụ 5: Cho ΔABC, có trung tuyến AM. Gọi O là trung điểm cau AM. Qua O kẻ đường thẳng d cắt các cạnh AB và AC. Gọi AA_1, BB_1, CC_1 là các đường vuông góc kẻ từ A, B, C đến đường thẳng d. Chứng minh rằng:

$$AA_1 = \frac{1}{2}(BB_1 + CC_1).$$

Giải

Kẻ MM_1 vuông góc với d, suy ra $MM_1 // BB_1 // CC_1$.

Trong hình thang BB_1C_1C, ta có:

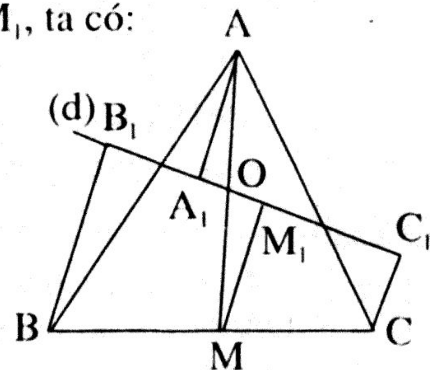
$$\begin{cases} BM = CM \\ MM_1 // BB_1 \end{cases} \Rightarrow MM_1 = \frac{1}{2}(BB_1 + CC_1).$$

Với hai tam giác vuông ΔOAA_1 và ΔOMM_1, ta có:

- $AO = MO$
- $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$, vì đối đỉnh

do đó $\Delta OAA_1 = \Delta OMM_1$ suy ra

$$AA_1 = MM_1 = \frac{1}{2}(BB_1 + CC_1).$$



III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Phát biểu định nghĩa đường trung bình của hình thang.

Câu hỏi 2: Phát biểu tính chất đường trung bình của hình thang.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho hình thang ABCD (AB // CD), gọi E, F, I, K theo thứ tự là trung điểm của AD, BC, AC, BD. Tính độ dài các đoạn EK, KI, IF biết:

a. AB = 10cm và CD = 18cm.

b. AB = 14cm và CD = 8cm.

Bài tập 2. Cho hình thang ABCD (AB // CD) có AB = a, CD = b. Trên AD lấy hai điểm E, F sao cho AE = EF = FD, trên BC lấy hai điểm M, N sao cho BM = MN = NC. Tính độ dài các đoạn EM, FN theo a và b.

Bài tập 3. Cho ΔABC có BC = a. Trên AB lấy hai điểm E, F sao cho AE = EF = FB, trên AC lấy hai điểm M, N sao cho AM = MN = NC. Tính độ dài các đoạn EM, FN theo a.

Bài tập 4. Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh bên của hình thang và song song với hai đáy thì đi qua trung điểm của hai đường chéo và đi qua trung điểm cạnh bên thứ hai.

Bài tập 5. Chứng minh rằng trong hình thang, đoạn thẳng nối trung điểm của hai đường chéo thì song song với hai đáy và có độ dài bằng nửa hiệu độ dài của hai đáy.

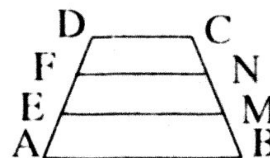
Bài tập 6. Cho hình thang ABCD (AB // CD) có AB = a, CD = b. Gọi E, F, I, K theo thứ tự là trung điểm của AD, BC, AC, BD. Tìm mối liên hệ giữa a và b để EK = KI = IF.

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. FI = 9cm, EK = 9cm, IK = 5cm.

Bài tập 2. Ta lần lượt có nhận xét:



- EM là đường trung bình của hình thang ABNF, do đó:

$$EM = \frac{1}{2}(AB + FN) \Leftrightarrow 2EM - FN = AB = a. \quad (1)$$

- FN là đường trung bình của hình thàng CDEM, do đó:

$$FN = \frac{1}{2}(CD + EM) \Leftrightarrow 2FN - EM = CD = b. \quad (2)$$

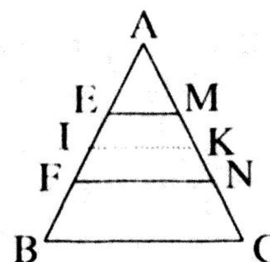
Từ (1), (2) suy ra:

$$EM = \frac{1}{3}(2a + b) \text{ và } FN = \frac{1}{3}(a + 2b).$$

Bài tập 3. Gọi I, K theo thứ tự là trung điểm của EF và MN.

Trong ΔAFN, ta có:

$$\begin{cases} AE = EF \\ AM = MN \end{cases} \Rightarrow EM = \frac{1}{2}FN.$$



Trong ΔABC, ta có:

$$AI = AE + EI = BF + FI = BI$$
$$AK = AM + MK = CN + NK$$

suy ra IK là đường trung bình, nên:

$$IK = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}.$$

Trong hình thang EMNF, ta có ngay:

$$IK = \frac{1}{2}(EM + FN) \Leftrightarrow \frac{a}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}FN + FN\right) \Leftrightarrow a = \frac{3FN}{2}$$

$$\Leftrightarrow FN = \frac{2a}{3} \text{ và do đó } EM = \frac{a}{3}.$$

Bài tập 6. a = 2b, với a > b.

CHỦ ĐỀ 6 DỰNG HÌNH BẰNG THƯỚC VÀ COMPA

DỰNG HÌNH THANG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. CÁC BÀI TOÁN DỰNG HÌNH ĐÃ BIẾT

Chúng ta đã biết cách giải các bài toán dựng hình sau:

1. Dựng một đoạn thẳng bằng một đoạn thẳng cho trước.
2. Dựng một góc bằng một góc cho trước.
3. Dựng đường trung trực của một đoạn thẳng cho trước, dựng trung điểm của đoạn thẳng cho trước.
4. Dựng tia phân giác của một góc cho trước.
5. Qua một điểm cho trước, dựng đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.
6. Qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng cho trước, dựng đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước.
7. Các dạng dựng tam giác (biết ba cạnh, biết hai cạnh và góc xen giữa, một cạnh và hai góc kề)

2. DỰNG HÌNH THANG

Ta hãy nhớ kết quả:

1. Muốn dựng hình thang, cần biết bốn yếu tố, trong đó số yếu tố về góc không quá 2.
2. Muốn dựng hình thang cân, cần biết ba yếu tố, trong đó số yếu tố về góc không quá 1.

3. BÀI TOÁN DỰNG HÌNH TỔNG QUÁT

Bài toán dựng gồm đầy đủ bốn bước:

1. ***Phân tích***: Bước phân tích cơ sở lí luận để đi đến cách dựng. Nội dung của bước phân tích gồm:
   - Giả sử đã có hình thoả mãn các điều kiện của bài toán.
   - Có thể vẽ thêm các điểm, các đường mới nhằm làm xuất hiện những yếu tố nêu trong đề bài hoặc làm xuất hiện những hình có thể dựng được ngay.
   - Đưa việc dựng các yếu tố còn lại của hình phải dựng về các phép dựng hình cơ bản và các bài toán dựng hình cơ bản.
2. ***Cách dựng***: Thực hiện phép dựng hình dựa trên bước phân tích.
3. ***Chứng minh***: Đi chứng minh hình nhận được trong bước cách dựng thoả mãn điều kiện đầu bài.
4. ***Biện luận***: Nội dung của bước biện luận là chỉ rõ trong trường hợp nào thì bài toán có nghiệm hình và có bao nhiêu nghiệm hình (nghiệm hình là hình thoả mãn điều kiện của bài toán).

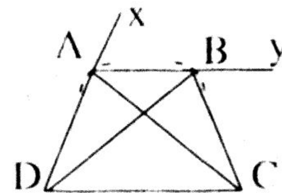
II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1: Dựng hình thang cân ABCD (AB // CD), biết CD = 4cm, AC = 6cm, $\hat{D} = 60^0$.

Giải

Phân tích: Giả sử đã dựng được hình thang cân ABCD thoả mãn bài toán.

Nhận xét rằng:



1. CD dựng được ngay.
2. Điểm A thuộc tia Dx của góc $\widehat{CDx} = 60^0$ sao cho AC = 6cm (tức là, A thuộc đường tròn (C, 6cm)).
3. Điểm B là giao điểm của đường thẳng Ay // CD và đường tròn (D, 6cm).

Cách dựng: Ta lần lượt thực hiện:

- Dựng đoạn CD = 4cm
- Dựng góc góc $\widehat{CDx} = 60^0$.
- Dựng đường tròn (C, 6cm) cắt Dx tại A.
- Dựng tia Ay // CD và đường tròn (D, 6cm), chúng cắt nhau ở B.

Khi đó, ABCD là hình thang phải dựng.

Chứng minh: Bạn đọc tự giải.

Biện luận: Bài toán có một nghiệm hình.

Nhận xét: Như vậy, ví dụ trên đã minh hoạ phương pháp dựng hình thang cân khi biết một cạnh đáy, một cạch bên và một góc.

Ví dụ 2: Dựng hình thang ABCD (AB // CD), biết AD = 3cm, CD = 6cm, BC = 4cm, $\hat{D} = 90^0$.

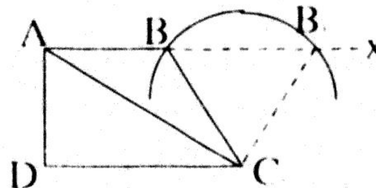
Giải

Phân tích: Giả sử đã dựng được hình thang cân ABCD thoả mãn bài toán.

Nhận xét rằng:

1. ΔACD dựng được ngay (tam giác vuông biết hai cạnh góc vuông).
2. Điểm B là giao điểm của đường thẳng Ax // CD và đường tròn (C, 4cm).

Cách dựng: Ta lần lượt thực hiện:



- Dựng ΔACD vuông tại D, biết AD = 3cm, CD = 6cm.
- Dựng tia Ax // CD và đường tròn (C, 4cm), chúng cắt nhau ở B.

Khi đó, ABCD là hình thang phải dựng.

Chứng minh: Bạn đọc tự giải.

Biện luận: Bài toán có hai nghiệm hình.

Nhận xét: 1. Như vậy, ví dụ trên đã minh hoạ phương pháp dựng hình thang vuông khi biết một cạnh đáy, hai cạch bên.

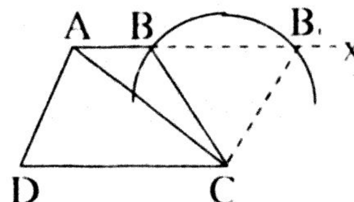
2. Giả sử BC = h, các em học sinh hãy biện luận theo h số nghiệm hình của ví dụ trên.

Ví dụ 3: Dựng hình thang ABCD (AB // CD), biết AC = 6cm, CD = 5cm, DA = 4cm, BC = 4.5cm.

Giải

Phân tích: Giả sử đã dựng được hình thang cân ABCD thoả mãn bài toán.

Nhận xét rằng:



1. ΔACD dựng được ngay (biết ba cạnh).
2. Điểm B là giao điểm của đường thẳng Ax // CD và đường tròn (C, 4.5cm).

Cách dựng: Ta lần lượt thực hiện:

- Dựng ΔACD, biết AC = 6cm, CD = 5cm, DA = 4cm.
- Dựng tia Ax // CD và đường tròn (C, 4.5cm), chúng cắt nhau ở B.

Khi đó, ABCD là hình thang phải dựng.

Chứng minh: Bạn đọc tự giải.

Biện luận: Bài toán có hai nghiệm hình.

Nhận xét: 1. Như vậy, ví dụ trên đã minh hoạ phương pháp dựng hình thang khi biết một cạnh đáy, hai cạch bên và một đường chéo.

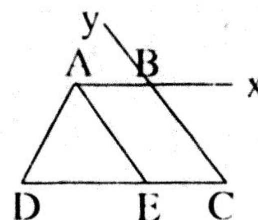
2. Giả sử BC = h, các em học sinh hãy biện luận theo h số nghiệm hình của ví dụ trên.

Ví dụ 4: Dựng hình thang cân ABCD (AB // CD), biết AB = m, CD = n và AD = p (m < n).

Giải

Phân tích: Giả sử đã dựng được hình thang cân ABCD thoả mãn bài toán.

Kẻ AE // BC ($E \in DC$), ta có:



AE = BC = AD = p.

EC = AB = m $\Rightarrow$ DE = CD - EC = n - m.

Nhận xét rằng:

1. ΔADE dựng được ngay (c.c.c).
2. Điểm C thuộc tia DE và cách D là n.
3. Điểm B là giao điểm của các đường thẳng Ax // CD, Cy // AE.

Cách dựng: Ta lần lượt thực hiện:

- Dựng ΔADE cân tại A biết DE = n - m, AD.
- Trên tia DE lấy C sao cho DC = n.
- Dựng các đường thẳng Ax // CD, Cy // AE, chúng cắt nhau ở B.

Khi đó, ABCD là hình thang phải dựng.

Chứng minh: Bạn đọc tự giải.

Biện luận: Bài toán có một nghiệm hình khi ΔADE dựng được, tức là:

$AD + AE > DE \Leftrightarrow p + p > n - m \Leftrightarrow 2p > n - m.$

Nhận xét: Như vậy, ví dụ trên đã minh hoạ phương pháp dựng hình thang cân khi biết hai cạnh đáy, một cạch bên.

Ví dụ 5: Dựng hình thang ABCD (AB // CD) biết AB = 2cm. CD = 4cm, $\hat{C} = 45^0, \hat{D} = 60^0$.

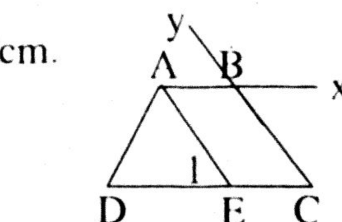
Giải

Phân tích: Giả sử đã dựng được hình thang ABCD thoả mãn bài toán.

Kẻ AE // BC ($E \in DC$), ta có:

$EC = AB = 2cm \Rightarrow DE = CD - EC = 2cm.$

$E_1 = C = 45^0.$



Nhận xét rằng:

1. ΔADE dựng được ngay (g.c.g).
2. Điểm C thuộc tia DE và cách D là 4cm.
3. Điểm B là giao điểm của các đường thẳng Ax // CD, Cy // AE.

Cách dựng: Ta lần lượt thực hiện:

- Dựng Δ ADE biết DE = 2cm, $\hat{D} = 60^0, \hat{E} = 45^0$.
- Trên tia DE lấy C sao cho DC = 4cm.
- Dựng các đường thẳng Ax // CD, Cy // AE, chúng cắt nhau ở B.

Khi đó, ABCD là hình thang phải dựng.

Chứng minh: Bạn đọc tự giải.

Biện luận: Bài toán có một nghiệm hình.

Nhận xét: Như vậy, ví dụ trên đã minh hoạ phương pháp dựng hình thang khi biết hai cạnh đáy và hai góc kề một đáy.

Ví dụ 6: Dựng hình thang ABCD (AB // CD) biết AB = a, CD = b, AC = c, BD = d.

Giải

Phân tích: Giả sử đã dựng được hình thang ABCD thoả mãn bài toán.

Kẻ BE // AC (E nằm trên CD kéo dài), ta có:

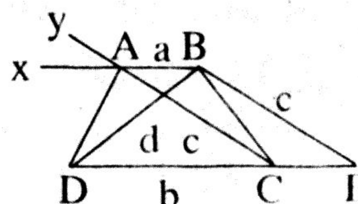
BE = AC = c,

CE = AB = a (tính chất đoạn chắn song song),

$\Rightarrow DE = a + b.$

Nhận xét rằng:

1. ΔBDE xác định ngay (vì biết ba cạnh).
2. Điểm A thoả mãn hai điều kiện:
   - Nằm trên đường thẳng Bx // ED,
   - Nằm trên đường thẳng Cy // EB.



Cách dựng: Ta lần lượt thực hiện:

- Dựng ΔBDE có ba cạnh DE = a + b, BD = d, BE = c.
- Trong ED dựng C sao cho EC = a (hoặc CD = b).
- Dựng Bx // ED, Cy // EB, chúng cắt nhau ở A.
- Nối AD, BC.

Khi đó, ABCD là hình thang phải dựng.

Chứng minh

Tứ giác ABCD có AB // CD nên là hình thang.

Theo tính chất đoạn chắn song song, ta có:

AB = CE = a, AC = BE = c.

Còn BD = d, CD = DE- CE = b.

Vậy ABCD là hình thang thoả mãn bài toán.

Biện luận: Bài toán có một nghiệm hình.

Nhận xét:

1. Sau khi giả sử hình thang ABCD đã dựng được, ta chưa thấy tam giác nào xác định ngay. Nhờ kẻ BE // AC, ta có ΔBDE xác định (biết ba cạnh). Cách vẽ đường phụ như trên làm cho hai đoạn thẳng AC và BD trở thành BE và BD có một đầu chung là B, nhờ đó trên hình vẽ xuất hiện những tính chất mới giúp ta giải bài toán.
2. Trong cách dựng ở ví dụ trên, ta đã dùng phương pháp lấy tam giác làm cơ sở, dựng ΔBDE, sau đó dựng C và A.

   Điểm C được xác định bởi giao của hai đường là tia ED và đường tròn (E, a). Điểm A được xác định bởi giao của hai đường là đường thẳng Bx // ED và đường thẳng Cy // EB.

   Để xác định C và A, ta đã dùng phương pháp quỹ tích tương giao, mỗi điểm C và A đều là giao *của hai quỹ tích tương giao là " Để dựng một điểm, ta phân tích điểm đó thoả mãn hai điều kiện. Do điều kiện thứ nhất, điểm đó thuộc một quỹ tích. Do điều kiện thứ hai, điểm đó thuộc một quỹ tích khác. Giao của hai quỹ tích ấy cho ta điểm cần xác định*".

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Nêu phương pháp dựng các hình sau:

1. **Dựng một đoạn thẳng bằng một đoạn thẳng cho trước.**
2. **Dựng một góc bằng một góc cho trước.**

3. Dựng đường trung trực của một đoạn thẳng cho trước, dựng trun điểm của đoạn thẳng cho trước.
4. Dựng tia phân giác của một góc cho trước.
5. Qua một điểm cho trước, dựng đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.
6. Qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng cho trước, dựng đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước.
7. Các dạng dựng tam giác (biết ba cạnh, biết hai cạnh và góc xen giữa, một cạnh và hai góc kề)

Câu hỏi 2: Trình bày các bước để thực hiện bài toán dựng hình tổng quát.

Câu hỏi 3: Trình bày phương pháp dựng hình thang cân ABCD (AB // CD), biết:

1. Độ dài các đoạn CD, AC và số đo của góc $\hat{D}$.
2. Độ dài các đoạn AB, CD, AD.

Câu hỏi 4: Trình bày phương pháp dựng hình thang ABCD (AB // CD), biết:

1. Độ dai các đoạn AD, CD, BC và số đo của góc $\hat{D}$.
2. Độ dài các đoạn AB, CD và số do của góc $\hat{C}$, $\hat{D}$.
3. Độ dài các đoạn AC, CD, DA, BC.
4. Độ dài các đoạn AC, BD, AB, CD.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Dựng hình thang cân ABCD (AB // CD), biết CD = 2cm, AC = 4cm, $\hat{D} = 70^0$.

Bài tập 2. Dựng hình thang cân ABCD (AB // CD), biết AB = AD, CD = 4cm, $\hat{D} = 50^0$.

Bài tập 3. Dựng hình thang cân ABCD (AB // CD), biết đường cao AH = 2cm, AC = 3cm, AB — CD = 2cm.

Bài tập 4. Dựng hình thang cân ABCD (AB // CD), biết AB = 1cm, CD = 4cm, AD = 3cm.

Bài tập 5. Dựng hình thang cân ABCD (AB // CD), biết AC = a, CD = b, DA = c.

Bài tập 6. Dựng hình thang ABCD (AB // CD), biết AB = 2cm, CD = 4cm, AC = 4cm, BD = 3cm.

Bài tập 7. Dựng hình thang ABCD (AB // CD), biết AD = a, CD = b, BC = c, $\hat{D} = 90^0$.

Bài tập 8. Dựng hình thang ABCD (AB // CD), biết AB = a, CD = b, $\hat{C} = 50^0$, $\hat{D} = 70^0$.

Bài tập 9. Dựng hình thang ABCD (AB // CD), biết AB = 2cm, CD = 5cm, AD = 3cm, BC = 4cm.

Bài tập 10. Dựng hình thang ABCD (AB // CD), biết CD = 3cm, AD = 2cm, BC = 2,5cm, $\hat{D} = 70^0$.

Bài tập 11. Dựng hình thang ABCD (AB // CD), biết AC = 4cm, CD = 3cm, DA = 2cm, BC = 2.5cm.

Bài tập 12. Dựng tứ giác ABCD, biết:

a. AB = 1,5cm, AD = 2cm, CD = 4cm, BD = 3cm, AC = 3,5cm.

b. AB = 2cm, AD = 3cm, $\hat{A} = 80^0$, $\hat{B} = 120^0$, $\hat{C} = 100^0$.

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Sử dụng kết quả trong các câu hỏi lí thuyết 3 và 4.

CHỦ ĐỀ 7 ĐỐI XỨNG TRỤC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

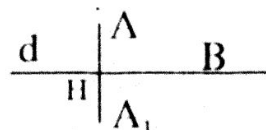
1. HAI ĐIỂM ĐỐI XỨNG QUA MỘT ĐƯỜNG THẲNG

***Định nghĩa**: Hai điểm được gọi là đối xứng với nhau qua đường thẳng d nếu d là đường trung trực của đoạn thẳng nối hai điểm đó.*

Như vậy, nếu A và A_1 đối xứng nhau qua đường thẳng d thì:

- Với H là giao điểm của AA_1 với d, ta có:

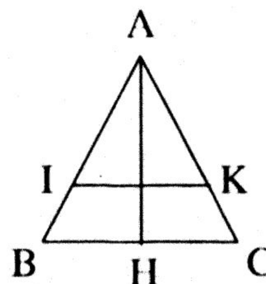
$$\begin{cases} AA_1 \perp d \\ AH = A_1H \end{cases}.$$



- Với điểm B bất kỳ trên đường thẳng d ($B \neq H$) thì ΔBAA_1 cân tại B.

Quy ước: Nếu điểm B thuộc đường thẳng d thì điểm đối xứng với B qua đường thẳng d chính là điểm B.

Thí dụ 1: Cho ΔABC cân tại A, đường cao AH. Lấy hai điểm I, K theo thứ tự trên AB, AC sao cho AI = AK. Chứng minh rằng điểm I đối xứng với điểm K qua AH.



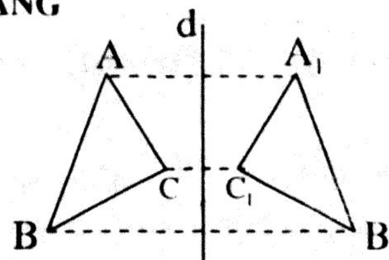
Giải

Vì ΔABC cân tại A nên đường cao AH là đường phân giác của góc $\hat{A}$.

Vì ΔAIK cân tại A nên đường phân giác AH cũng là đường trung trực của IK, suy ra I đối xứng với AH.

2. HAI HÌNH ĐỐI XỨNG QUA MỘT ĐƯỜNG THẲNG

***Định nghĩa**: Hai hình được gọi là đối xứng với nhau qua đường thẳng d nếu mỗi điểm thuộc hình này đối xứng với một điểm thuộc hình kia qua đường thẳng d và ngược lại.*



Khi đó, đường thẳng d được gọi là trục đối xứng của hai hình.

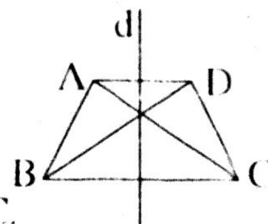
Ta có kết quả : "*Nếu hai đoạn thẳng (góc, tam giác) đối xứng với nhau qua một đường thẳng thì chúng bằng nhau*".

Thí dụ 2: Cho ΔABC có AB < AC. Gọi d là đường trung trực của BC. Vẽ điểm D đối xứng với điểm A qua đường thẳng d.

a. Tìm các đoạn đối xứng với đoạn thẳng AB qua d, đối xứng với đoạn thẳng AC qua d.

b. Tứ giác ABCD là hình gì ? Vì sao ?

Giải



a. Ta có:

- A, D đối xứng nhau qua d.
- B, C đối xứng nhau qua d.

do đó, đoạn đối xứng với đoạn thẳng AB qua d là DC.

Tương tự, đoạn đối xứng với đoạn thẳng AC qua d là BD.

b. Tứ giác ABCD có:

AD // BC (vì cùng vuông góc với d ⇒ ABCD là hình thang.

AC = BD (vì chúng đối xứng qua d), tức là có hai đường chéo bằng nhau,

suy ra ABCD là hình thang cân.

3. HÌNH CÓ TRỤC ĐỐI XỨNG

Định nghĩa: *Đường thẳng d gọi là trục đối xứng của hình $\mathcal{H}$ nếu điểm đối xứng với mỗi điểm thuộc hình $\mathcal{H}$ qua đường thẳng d cũng thuộc hình $\mathcal{H}$.*

Ta có kết quả: " *Đường thẳng đi qua trung điểm hai đáy của hình thang cân là trục đối xứng của hình thang cân đó* ".

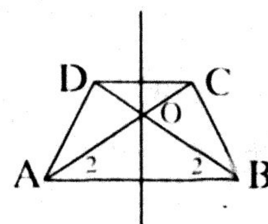
Thí dụ 3: Chứng minh rằng giao điểm O của hai đường chéo của hình thang cân ABCD (AB // CD) nằm trên trục đối xứng của hình thang cân đó.

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1: Ta đi chứng minh O thuộc đường trung trực của AB.

Thật vậy:



$\Delta ABD = \Delta BAC$ (c.g.c) $\Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{B}_2$

$\Rightarrow \Delta OAB$ cân tại O $\Rightarrow OA = OB$

$\Rightarrow$ O thuộc đường trung trực của AB.

$\Rightarrow$ O thuộc trục đối xứng của hình thang.

Cách 2: Vì hai đường chéo của hình thang cân cắt nhau tại một điểm O duy nhất do đó điểm O phải nằm trên trục đối xứng của hình.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

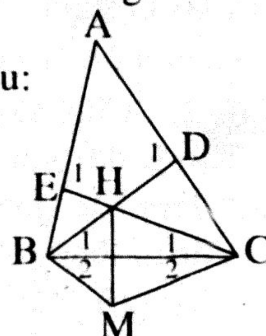
Ví dụ 1: Cho ΔABC có ba góc nhọn, $\hat{A} = 40^0$, trực tâm H. Gọi M là điểm đối xứng với H qua BC.

a. Chứng minh rằng $\Delta BHC = \Delta BMC$.

b. Tính $\widehat{BMC}$.

c. Kết quả ở câu a) có thay đổi không nếu ΔABC có B là góc tù ?

Giải



a. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1: Vì M là điểm đối xứng với H qua BC nên BC là đường trung trực của MH, suy ra:

BH = BM, CH = CM

$\Rightarrow \Delta BHC = \Delta BMC$ (c.c.c).

Cách 2: Nhận xét rằng hai tam giác ΔBHC và ΔBMC đối xứng nhau qua BC nên ΔBHC = ΔBMC.

b. Gọi D là giao điểm của BH với AC và E là giao điểm của CH với AB. Theo kết quả câu a), ta có:

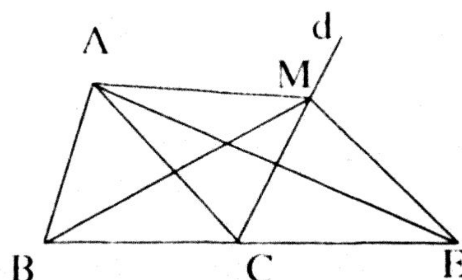
$$B\hat{M}C = B\hat{H}C = E\hat{H}D = 360^0 - \hat{A} - \hat{E}_1 - \hat{D}_1$$
$$= 360^0 - 40^0 - 90^0 - 90^0 = 140^0.$$

c. Kết quả trên không thay đổi nếu ΔABC có B là góc tù - *Bạn đọc vẽ hình để chứng minh.*

Ví dụ 2: Cho ΔABC. Điểm M nằm trên đường phân giác ngoài của góc C (M ≠ C). Chứng minh rằng:

$$CA + CB < MA + MB.$$

Giải



Trên BC kéo dài về phía C lấy điểm E sao cho CA = CE, khi đó đường phân giác ngoài d của góc C là trung trực của AE, ta được:

MA = ME.

Suy ra:

$$CA + CB = CE + CB = BE < ME + MB = MA + MB.$$

Ví dụ 3: Cho góc $x\hat{O}y = 50^0$, điểm A nằm trong góc đó. Vẽ điểm B đối xứng với A qua Ox, vẽ điểm C đối xứng với A qua Oy.

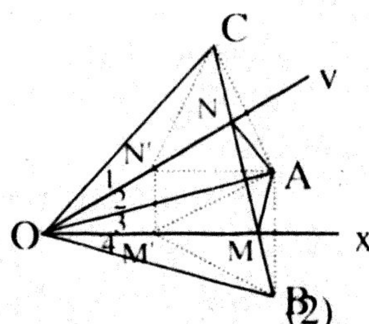
a. Chứng minh rằng OB = OC.

b. Tính $B\hat{O}C$.

c. BC cắt các tia Ox, Oy theo thứ tự ở M, N. Chứng minh rằng trong các tam giác AM'N' có M' ∈ Ox, N' ∈ Oy, tam giác AMN có chu vi nhỏ nhất.

Giải

a. Ta lần lượt có nhận xét:



- B đối xứng với A qua Ox
  ⇒ Ox là đường trung trực của AB
  ⇒ OA = OB. (1)
- C đối xứng với A qua Oy
  ⇒ Oy là đường trung trực của AC
  ⇒ OA = OC. (2)

Từ (1) và (2) suy ra OB = OC.

b. Theo kết quả câu a), ta có:

- ΔAOB cân tại O ⇒ $\hat{O}_3 = \hat{O}_4$.
- ΔAOC cân tại O ⇒ $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$.

Khi đó:

$$B\hat{O}C = \hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \hat{O}_4 = 2\hat{O}_2 + 2\hat{O}_3 = 2(\hat{O}_2 + \hat{O}_3)$$
$$= 2x\hat{O}y = 100^0.$$

c. Dựa vào tính đối xứng, ta có:

$NA = NC, N'A = N'C, AM = BM, AM' = BM'$.

Chu vi ΔAMN được cho bởi:

$CV_{\Delta AMN} = AM + MN + NA = BM + MN + NC$

$= BC \leq BM' + M'N' + N'C$

$= AM' + M'N' + N'A = CV_{\Delta AM'N'}$.

Vậy, ΔAMN có chu vi nhỏ nhất.

Nhận xét:
1. Tổng quát của câu b, ta có: " *Nếu* $x\hat{O}y = \alpha$ *thì*
   - $B\hat{O}C = 2\alpha$ *với* $\alpha < 90^0$,
   - $B\hat{O}C = 360^0 - 2\alpha$ *với* $90^0 < \alpha < 180^0$ ".
2. Câu c) có thể diễn đạt dưới dạng một bài toán dựng hình về cực trị: " *Tìm các điểm* $M \in Ox$, $N \in Oy$ *sao cho* Δ*AMN có chu vi nhỏ nhất* ".

   Chú ý rằng bài toán dựng hình này chỉ có nghiệm hình với $x\hat{O}y < 90^0$.

Ví dụ 4: Cho hai điểm cố định A, B nằm trong nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng d. Tìm trên d một điểm C sao cho ΔABC có chu vi nhỏ nhất.

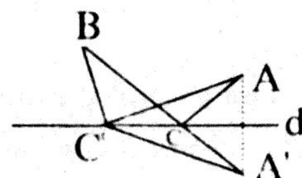
Giải

Chu vi ΔABC được cho bởi:

$CV_{\Delta ABC} = AB + BC + CA$,

do đó ΔABC có chu vi nhỏ nhất khi và chỉ khi tổng CA + CB nhỏ nhất. Trong bài toán dựng hình này bước phân tích và chứng minh được giải đồng thời.

Phân tích và chứng minh



Gọi A' là điểm đối xứng với A qua d, A'B cắt d tại C. Ta đi chứng minh C là điểm thoả mãn điều kiện đầu bài.

Thật vậy, với C' là điểm bất kì thuộc đường thẳng d, ta có:

$CA + CB = CA' + CB = A'B \leq A'C' + C'B = AC' + C'B$

Vậy, tổng CA + CB nhỏ nhất.

Cách dựng: Ta lần lượt thực hiện:

- Dựng A' đối xứng với A qua d.
- Nối A'B cắt d tại P, đó là điểm phải dựng.

Biện luận: Vì có duy nhất một giao điểm của A'B với d nên bài toán có một nghiệm hình.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Định nghĩa hai điểm đối xứng qua một đường thẳng, hai hình đối xứng qua một đường thẳng.

Câu hỏi 2: Thế nào là hình có trục đối xứng ?

Câu hỏi 3:

a. Cho ΔABC cân tại A, đường cao AH. Hãy kể tên một số cặp điểm đối xứng qua một đường thẳng, cặp đoạn thẳng đối xứng qua một đường thẳng.

b. ΔABC cân tại A có phải là hình có trục đối xứng không? Trục đối xứng là đường thẳng nào ?

c. Chỉ ra trục đối xứng của: góc xOy, tam giác đều, đường tròn.

d. Kể tên một vài chữ cái (in, viết hoa) chỉ có một trục đối xứng, có hai trục đối xứng.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho tứ giác ABCD có AB = AD, BC = CD (*hình cái diều*). Chứng minh rằng điểm B đối xứng với điểm D qua đường thẳng AC.

Bài tập 2. Cho hình thang vuông ABCD ($\hat{A} = \hat{D} = 90^0$). Gọi E là điểm đối xứng với B qua AD, I là giao điểm của CE và AD. Chứng minh rằng $\widehat{AIB} = \widehat{CID}$.

Bài tập 3. Cho ΔABC có $\hat{A} = 40^0$, điểm M thuộc cạnh BC. Vẽ điểm D đối xứng với M qua AB, vẽ điểm E đối xứng với M qua AC.

a. Chứng minh rằng AD = AE.

b. Tính số đo góc $\widehat{DAE}$.

Bài tập 4. Cho góc $\widehat{xOy} = 60^0$, điểm A nằm trong góc đó. Vẽ điểm B đối xứng với A qua Ox, vẽ điểm C đối xứng với A qua Oy.

a. Chứng minh rằng OB = OC.

b. Tính $\widehat{BOC}$.

c. Dựng điểm M thuộc tia Ox, điểm N thuộc tia Oy sao cho tam giác AMN có chu vi nhỏ nhất.

Bài tập 5. Cho hai điểm cố định A, B nằm trong nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng d. Tìm trên d một điểm P sao cho tổng PA + PB nhỏ nhất.

Bài tập 6. Cho ΔABC cân tại A, đường cao AH. Vẽ điểm I đối xứng với H qua AB, vẽ điểm K đối xứng với H qua AC. Các đường thẳng AI, AK cắt BC theo thứ tự ở M và N. Chứng minh rằng M đối xứng với N qua AH.

Bài tập 7. Cho ΔABC cân tại A. Qua A kẻ đường thẳng m song song với BC, trên đó lấy điểm D bất kì (khác A). Chứng minh rằng chu vi ΔABC nhỏ hơn chu vi ΔDBC.

Bài tập 8. Cho điểm A nằm ngoài đường thẳng d. Hãy dựng điểm B sao cho với một điểm M thuộc d, bao giờ ta cũng có AM = BM.

Bài tập 9. Cho hai điểm B, C nằm về hai phía của đường thẳng d. Dựng điểm A thuộc d sao cho d là đường phân giác của góc BAC.

Bài tập 10. Cho ΔABC có ba góc nhọn (AB < AC), đường cao AH, M là trung điểm của BC, D là điểm nằm giữa H và M. Dựng đường thẳng song song với BC, cắt các cạnh AB, AC theo thứ tự ở E, F sao cho DE = DF.

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

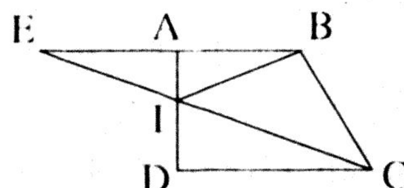
Bài tập 1. Với giả thiết:

AB = AD, BC = CD ⇒ AC là đường trung trực của BD

Do đó, điểm B đối xứng với điểm D qua đường thẳng AC.

Bài tập 2. Vì E là điểm đối xứng với B qua AD nên:

$\widehat{AIB} = \widehat{AIE}$. (1)



Mặt khác, ta có:

$\widehat{AIE} = \widehat{CID}$, vì đối đỉnh. (2)

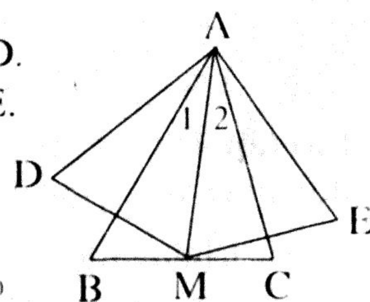
Từ (1), (2) suy ra $\widehat{AIB} = \widehat{CID}$.

Bài tập 3.

a. Ta lần lượt có:

- Vì D đối xứng với M qua AB nên AM = AD.
- Vì E đối xứng với M qua AC nên AM = AE.

Suy ra AD = AE.



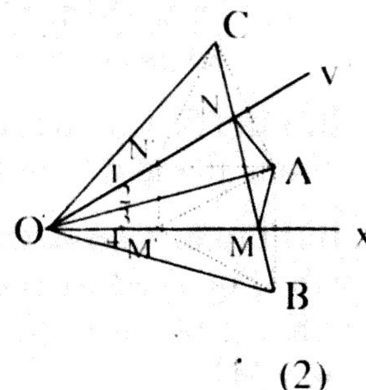
b. Ta có:

$\widehat{DAE} = \widehat{DAM} + \widehat{EAM}$

$= 2\hat{A}_1 + 2\hat{A}_2 = 2(\hat{A}_1 + \hat{A}_2) = 2\hat{A} = 80^0$.

Bài tập 4.

a. Ta lần lượt có nhận xét:



- B đối xứng với A qua Ox

  ⇒ Ox là đường trung trực của AB

  ⇒ OA = OB. (1)

- C đối xứng với A qua Oy

  ⇒ Oy là đường trung trực của AC

  ⇒ OA = OC. (2)

Từ (1) và (2) suy ra OB = OC.

b. Theo kết quả câu a), ta có:

- AOB cân tại O ⇒ $\hat{O}_3 = \hat{O}_4$.
- ΔAOC cân tại O ⇒ $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$.

Khi đó:

$$\widehat{BOC} = \hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \hat{O}_4 = 2\hat{O}_2 + 2\hat{O}_3 = 2(\hat{O}_2 + \hat{O}_3)$$
$$= 2x\hat{O}y = 120^0.$$

c. Giả sử BC cắt các tia Ox, Oy theo thứ tự ở M, N. Ta đi chứng minh M và N là hai điểm cần dựng.

Thật vậy, dựa vào tính đối xứng, ta có:

NA = NC, N'A = N'C, AM = BM, AM' = BM'.

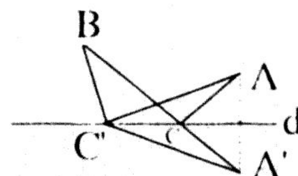
Chu vi ΔAMN được cho bởi:

$$CV_{\Delta AMN} = AM + MN + NA = BM + MN + NC$$
$$= BC < BM' + M'N' + N'C$$
$$= AM' + M'N' + N'A = CV_{\Delta AM'N'}.$$

Vậy, ΔAMN có chu vi nhỏ nhất.

Bài tập 5. Gọi A' là điểm đối xứng với A qua d, A'B cắt d tại P. Ta đi chứng minh P là điểm cần tìm.

Thật vậy, với P' là điểm bất kì thuộc đường thẳng d, ta có:



$$PA + PB = PA' + PB$$
$$= A'B \leq A'P' + P'B = AP' + P'B$$

Vậy, tổng PA + PB nhỏ nhất.

Bài tập 6. Chứng minh AM = AN hoặc MH = NH.

Bài tập 7. *Học sinh tự vẽ hình.*

Trên tia BA lấy điểm C_1 sao cho $AC_1 = AC$

Vì ΔABC cân tại A nên đường thẳng m là trung trực của CC_1, ta được:

$$DC_1 = DC.$$

Ta có:

$$CV_{\Delta ABC} = AB + AC + BC = AB + AC_1 + BC$$
$$= BC_1 + BC \leq BD + DC_1 + BC = BD + DC + BC = CV_{\Delta BCD}.$$

Bài tập 8. B là điểm đối xứng với A qua đường thẳng d.

Bài tập 9. Gọi B_1 là điểm đối xứng với B qua d.

Khi đó, A là giao điểm của CB_1 với đường thẳng d.

Lưu ý: Các em học sinh cần chứng minh nhận định trên.

Bài tập 10. Gọi I là giao điểm của AM với đường thẳng d qua D và vuông góc với BC.

Khi đó, đường thẳng a qua I song song với BC là đường thẳng cần dựng.

Lưu ý: Các em học sinh cần chứng minh nhận định trên.

CHỦ ĐỀ 8

HÌNH BÌNH HÀNH

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

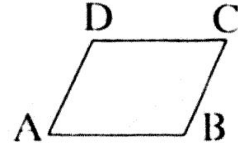
1. ĐỊNH NGHĨA

Hình bình hành là tứ giác có các cạnh đối song song .

Với hình bình hành ABCD, ta có:

AB // CD,

AD // BC.



2. CÁC TÍNH CHẤT CỦA HÌNH BÌNH HÀNH

Trong hình bình hành, ta có:

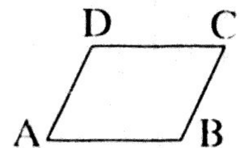
1. *Các cạnh đối bằng nhau.*
2. *Các góc đối bằng nhau.*
3. *Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.*

Sau đây chúng ta sẽ sử dụng ba ví dụ để minh hoạ cho việc sử dụng ba tính chất trên của hình bình hành. Và trước hết là ví dụ sử dụng tính chất 1.

Thí dụ 1: Cho hình bình hành ABCD có chu vi bằng 10cm, chu vi tam giác ABD bằng 9cm. Tính độ dài đoạn BD.

Giải

Ta có:



$CV_{ABCD} = 10 = AB + BC + CD + DA = 2(AB + AD)$

$\Leftrightarrow AB + AD = 5cm$

$CV_{ABD} = 9 = AB + BD + DA = 5 + BD \Leftrightarrow BD = 4cm.$

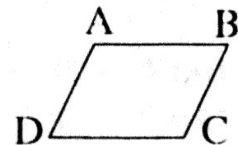
Vậy BD = 4cm.

Thí dụ 2: Tính các góc của hình bình hành ABCD, biết:

a. $\hat{A} = 100^0$.

b. $\hat{A} - \hat{B} = 30^0$.

Giải



a. Từ giả thiết $\hat{A} = 100^0$ suy ra:

$\hat{C} = \hat{A} = 100^0$,

$\hat{B}\ \ \hat{D} = 180^0 - \hat{A} = 80^0$.

b. Từ giả thiết $\hat{A} - \hat{B} = 30^0$ suy ra

$\hat{A} = 30^0 + \hat{B}$.

Ta có:

$\hat{A} + \hat{B} = 180^0 \Leftrightarrow 30^0 + \hat{B} + \hat{B} = 180^0 \Leftrightarrow \hat{B} = 75^0$.

Khi đó, ta được:

$\hat{D} = \hat{B} = 75^0,\ \hat{C} = \hat{A} = 105^0$.

Thí dụ 3: Cho hình bình hành ABCD. Qua C kẻ đường thẳng d chỉ có một điểm chung C với hình bình hành. Gọi AA_1, BB_1, DD_1 là các đường vuông góc kẻ từ A, B, D đến đường thẳng d. Chứng minh rằng $AA_1 = BB_1 + DD_1$.

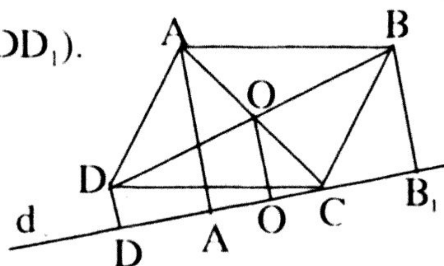
Giải

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD.

Hạ $OO_1 \perp d$.

Trong hình thang BB_1D_1D, ta có:

$$\begin{cases} BO = DO \\ OO_1 \parallel BB_1 \end{cases} \Rightarrow OO_1 = \frac{1}{2}(BB_1 + DD_1).$$



Trong ΔAA_1C, ta có:

$$\begin{cases} AO = CO \\ OO_1 \parallel AA_1 \end{cases} \Rightarrow OO_1 = \frac{1}{2}AA_1.$$

Suy ra:

$$\frac{1}{2}AA_1 = \frac{1}{2}(BB_1 + DD_1) \Leftrightarrow AA_1 = BB_1 + DD_1.$$

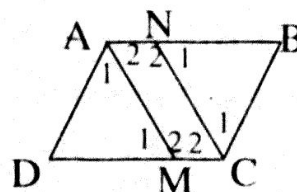
3. CÁC DẤU HIỆU NHẬN BIẾT

1. *Tứ giác có các cạnh đối song song là hình bình hành.*
2. *Tứ giác có các cạnh đối bằng nhau là hình bình hành.*
3. *Tứ giác có hai cạnh đối song song và bằng nhau là hình bình hành.*
4. *Tứ giác có các góc đối bằng nhau là hình bình hành.*
5. *Tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường là hình bình hành.*

Thí dụ 4: Cho hình bình hành ABCD. Tia phân giác của góc A cắt CD tại M, tia phân giác của góc C cắt AB tại N. Chứng minh rằng AMCN là hình bình hành.

Giải

Với hai tam giác ΔADM và ΔCBN, ta có:



$\hat{D} = \hat{B}$,

$AD = CB$,

$\hat{A}_1 = \frac{1}{2}\hat{A} = \frac{1}{2}\hat{C} = \hat{C}_1$,

suy ra $\Delta ADM = \Delta CBN$ (g.c.g) do đó $DM = BN$, $AM = CN$, $\hat{M}_1 = \hat{N}_1$.

Tới đây, ta có thể sử dụng các cách trình bày sau:

Cách 1: Sử dụng dấu hiệu 1.

Vì:

$\hat{M}_1 = \hat{N}_1 = \hat{C}_2 \Rightarrow AM \parallel CN$ (hai góc đồng vị).

Khi đó, tứ giác AMCN có

$AN // CM$ và $AM // CN \Rightarrow AMCN$ là hình bình hành.

Cách 2: Sử dụng dấu hiệu 2.

Vì:

$AN = AB - BN = CD - DM = CM$.

Khi đó, tứ giác AMCN có

$AM = CN$ và $AN = CM \Rightarrow AMCN$ là hình bình hành.

Cách 3: Sử dụng dấu hiệu 3.

Vì:

$\hat{M}_1 = \hat{N}_1 = \hat{C}_2 \Rightarrow AM // CN$ (hai góc đồng vị).

Khi đó, tứ giác AMCN có

$AN \overset{//}{=} CM \Rightarrow AMCN$ là hình bình hành.

Cách 4: Sử dụng dấu hiệu 4.

Vì:

$\hat{M}_1 = \hat{N}_1 \Rightarrow \hat{M}_2 = \hat{N}_2$.

Khi đó, tứ giác AMCN có

$\hat{M}_2 = \hat{N}_2$ và $\hat{A}_2 = \frac{1}{2}\hat{A} = \frac{1}{2}\hat{C} = \hat{C}_2$,

$\Rightarrow AMCN$ là hình bình hành.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

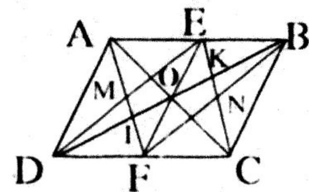
__Ví dụ 1:__ Cho hình bình hành ABCD. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, CD. Gọi M là giao điểm của AF và DE, N là giao điểm của BF và CE.

a. Chứng minh rằng $DE = BF$.
b. Chứng minh rằng EMFN là hình bình hành.
c. Chứng minh rằng Các đường thẳng AC, EF, MN đồng qui.
d. Gọi I, K theo thứ tự là giao điểm của BD với AF, CE. Chứng minh rằng $BK = KI = ID$.

Giải

a. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1: Với hai tam giác ΔADE và ΔCBF, ta có:



$AD = CB$,

$\hat{A} = \hat{C}$,

$AE = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD = CF$,

suy ra $\Delta ADE = \Delta CBF$ (c.g.c) do đó $DE = BF$.

Cách 2: Nhận xét rằng:

$BE \overset{//}{=} DF \Leftrightarrow BEDF$ là hình bình hành $\Rightarrow DE = BF$.

b. Nhận xét rằng:

$BE \overset{//}{=} DF \Leftrightarrow BEDF$ là hình bình hành

$\Rightarrow DE // BF \Rightarrow EM // NF.$ (1)

$AE \overset{//}{=} CF \Leftrightarrow AECF$ là hình bình hành

$\Rightarrow AF // CE \Rightarrow MF // NE.$ (2)

Từ (1), (2) suy ra tứ giác EMFN là hình bình hành.

c. Gọi O là giao điểm của AC và EF (O là trung điểm EF), ta đi chứng minh O thuộc MN.

Thật vậy, vì EMFN là hình bình hành nên EF và MN cắt nhau tại trung điểm mỗi đường, suy ra O thuộc MN.

d. Trong ΔABI, ta có:

$$\begin{cases} AE = BE \\ EK // AI \end{cases} \Rightarrow BK = KI.$$

Trong ΔCDK, ta có:

$$\begin{cases} CF = DF \\ FI // CK \end{cases} \Rightarrow DI = KI.$$

Vậy, ta được BK = KI = ID.

__Ví dụ 2:__ Cho hình bình hành ABCD. Lấy hai điểm E, F trên BD sao cho $BE = DF < \frac{BD}{2}$.

a. Chứng minh rằng AECF là hình bình hành.

b. Gọi K là giao điểm của CE và AB, gọi I là trung điểm của AK. Xác định vị trí của điểm E để AI = IK = KB.

Giải

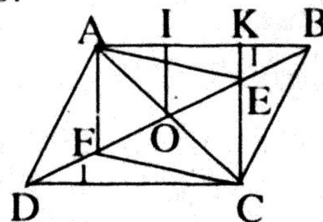
a. Ta có thể lựa chọn một trong ba cách trình bày sau:

Cách 1: Với hai tam giác ΔABE và ΔCDF, ta có:

AB = CD,

$B_1 = D_1$,

BE = CF,



suy ra $\Delta ABE = \Delta CDF$ (c.g.c) do đó AE = CF.

Chứng minh tương tự, ta có AF = CE.

Khi đó, tứ giác AECF có các cạnh đối bằng nhau nên nó là hình bình hành.

Cách 2: Cũng chứng minh $\Delta ADF = \Delta CBE$ như ở cách 1, suy ra:

$\widehat{AFD} = \widehat{BEC} \Rightarrow AF // CE$ (cặp góc so le ngoài bằng nhau).

Tứ giác AECF có một cặp cạnh đối song song và bằng nhau ($AF \overset{//}{=} CE$) nên là hình bình hành.

Cách 3: Theo tính chất đường chéo hình bình hành:

$OA = OC,$ (1)

$OB = OD.$

Mặt khác, ta có:

$BE = DF \Rightarrow OB - BE = OD - DF \Rightarrow OE = OF.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra AECF là hình bình hành (có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường).

b. Ta có:

$$\begin{cases} OA = OC \\ AI = KI \end{cases} \Rightarrow OI // CK.$$

Khi đó:

$$\begin{cases} BK = IK \\ KE // IO \end{cases} \Rightarrow \text{E là trung điểm của OB.}$$

Chú ý: Một trường hợp đặc biệt của ví dụ trên là E, F theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của A, C lên BD.

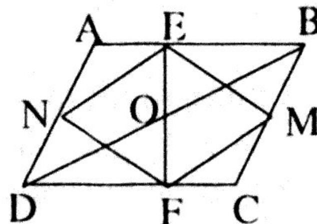
Ví dụ 3: Cho hình bình hành ABCD. Lấy hai điểm E, F theo thứ tự thuộc AC và CD sao cho AE = CF. Lấy hai điểm M, N theo thứ tự thuộc BC và AD sao cho CM = AN. Chứng minh rằng:

a. MENF là hình bình hành.

b. Các đường thẳng AC, BD, MN, EF đồng qui.

Giải

a. Với hai tam giác ΔAEN và ΔCFM, ta có:



$AE = CF,$

$\hat{A} = \hat{C},$

$AN = CM,$

suy ra ΔAEN = ΔCFM (c.g.c) do đó

$NE = MF.$

Chứng minh tương tự, ta có ME = NF.

Khi đó, tứ giác MENF có các cạnh đối bằng nhau nên nó là hình bình hành.

b. Nhận xét rằng:

$BE \overset{//}{=} DF \Leftrightarrow$ BEDF là hình bình hành

$\Rightarrow$ BD và EF cắt nhau tại O là trung điểm của mỗi đường.

$AE \overset{//}{=} CF \Leftrightarrow$ AECF là hình bình hành

$\Rightarrow$ AC và EF cắt nhau tại O là trung điểm của mỗi đường.

Cuối cùng, theo a) ta có MENF nên MN và EF cắt nhau tại O là trung điểm của mỗi đường.

Vậy, các đường thẳng AC, BD, MN, EF đồng qui tại O.

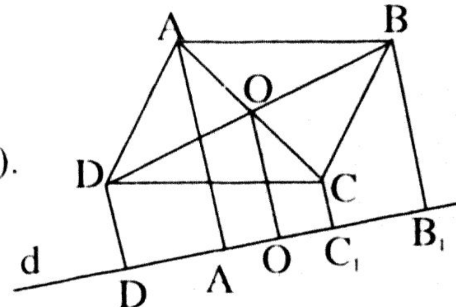
Chú ý: Một trường hợp đặc biệt của ví dụ trên là M, N, E, F theo thứ tự là trung điểm của BC, AD, AB, CD.

Ví dụ 4: Cho hình bình hành ABCD và đường thẳng d không có điểm chung với hình bình hành. Gọi AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 là các đường vuông góc kẻ từ A, B, C, D đến đường thẳng d. Tìm liên hệ độ dài giữa AA_1, BB_1, CC_1, DD_1.

Giải

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD.

Hạ $OO_1 \perp d$.



Trong hình thang BB_1D_1D, ta có:

$$\begin{cases} BO = DO \\ OO_1 // BB_1 \end{cases} \Rightarrow OO_1 = \frac{1}{2}(BB_1 + DD_1).$$

Trong hình thang AA_1C_1C, ta có:

$$\begin{cases} AO = CO \\ OO_1 // AA_1 \end{cases} \Rightarrow OO_1 = \frac{1}{2}(AA_1 + CC_1).$$

Suy ra:

$$\frac{1}{2}(AA_1 + CC_1) = \frac{1}{2}(BB_1 + DD_1) \Leftrightarrow AA_1 + CC_1 = BB_1 + DD_1.$$

Ví dụ 5: Dựng hình bình hành ABCD, biết:

a. $AB = 4cm$, $AD = 3cm$, $\hat{A} = 60^0$.

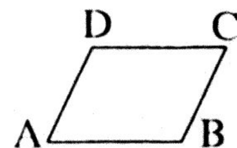
b. $AC = 6cm$, $BD = 4cm$, $\widehat{BOC} = 50^0$.

Giải

a. Ta thực hiện theo bốn bước sau:

Phân tích: Giả sử đã dựng được hình bình hành ABCD thoả mãn bài toán.

Nhận xét rằng:



1. ΔABD dựng được ngay.
2. Điểm C là giao điểm của đường thẳng Bx // AD và Dy // AB.

Cách dựng: Ta lần lượt thực hiện:

- Dựng ΔABD, biết $AB = 3cm$, $AD = 5cm$, $\hat{A} = 120^0$.
- Dựng tia Bx // AD và Dy // AB, chúng cắt nhau ở C.

Khi đó, ABCD là hình thang phải dựng.

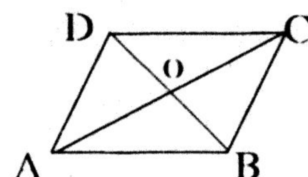
Chứng minh: Bạn đọc tự giải.

Biện luận: Bài toán có một nghiệm hình.

b. Ta thực hiện theo bốn bước sau:

Phân tích: Giả sử đã dựng được hình bình hành ABCD thoả mãn bài toán.

Nhận xét rằng:



1. ΔBOC dựng được ngay.
2. Điểm A thuộc OC sao cho OA = OC.
3. Điểm D thuộc OB sao cho OD = OB.

Cách dựng: Ta lần lượt thực hiện:

- Dựng ΔOBC, biết OC = 3cm, OB = 2cm, $\widehat{BOC} = 50^0$.
- Kéo dài OC về phía O, lấy điểm A thoả mãn OA = OC = 3cm.
- Kéo dài OB về phía O, lấy điểm D thoả mãn OD = OB = 2cm.

Khi đó, ABCD là hình thang phải dựng.

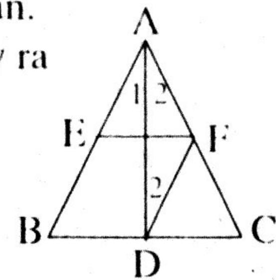
Chứng minh: Bạn đọc tự giải.

Biện luận: Bài toán có một nghiệm hình.

<u>**Ví dụ 6:**</u> Cho ΔABC. Dựng đường thẳng song song với BC, cắt các cạnh AB và AC theo thứ tự tại E, F sao cho BE = CF.

Giải

Phân tích: Giả sử đã dựng được EF thoả mãn bài toán.



Kẻ FD // AB, khi đó BDFE là hình bình hành, suy ra

$DF = BE = AF \Rightarrow \Delta FAD$ cân tại F

$\Rightarrow \hat{A}_2 = D_2 = \hat{A}_1$

$\Rightarrow$ AD là đường phân giác goác $\hat{A}$.

Cách dựng: Ta lần lượt thực hiện:

- Dựng AD là đường phân giác goác $\hat{A}$.
- Dựng tia Dx // AB, cắt AC tại F.
- Dựng tia Fy // BC, cắt AB tại E.

Khi đó, EF là đường thẳng phải dựng.

Chứng minh: Bạn đọc tự giải.

Biện luận: Bài toán có một nghiệm hình.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Phát biểu định nghĩa và các tính chất của hình bình hành.

Câu hỏi 2: Tính các góc của hình bình hành biết một góc bằng 81^0.

Câu hỏi 3: Có thể khẳng định rằng " *Trong hình bình hành, có hai góc nhọn, hai góc tù* " hay không ?

Câu hỏi 4: Phát biểu các dấu hiệu nhận biết một tứ giác là hình bình hành.

Câu hỏi 5: Các mệnh đề sau đúng hay sai ?

- Hình thang có hai đáy bằng nhau là hình bình hành.
- Hình thang có hai cạnh bên bằng nhau là hình bình hành.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho hình bình hành ABCD có chu vi bằng 18cm, chu vi tam giác ABD bằng 11cm. Tính độ dài đoạn BD.

Bài tập 2. Tính các góc của hình bình hành ABCD, biết:

b. $\hat{A} = 80^0$.

c. $\hat{A} - \hat{B} = 20^0$.

Bài tập 3. Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N, E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng MNEF là hình bình hành.

Bài tập 4. Cho hình bình hành ABCD, O là giao điểm của hai đường chéo, M và N là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng ba điểm M, O, N thẳng hàng.

Bài tập 5. Cho hình bình hành ABCD. Hạ AH, CK vuông góc với BD.

a. Chứng minh rằng AHCK là hình bình hành.

b. Gọi O là trung điểm của HK. Chứng minh rằng O là trung điểm của BD.

Bài tập 6. Cho hình bình hành ABCD. Gọi M, N, E, F theo thứ tự là trung điểm của BC, AD, AB, CD. Chứng minh rằng:

a. MENF là hình bình hành.

b. Các đường thẳng AC, BD, MN, EF đồng qui.

Bài tập 7. Cho hình bình hành ABCD. Lấy hai điểm M, N theo thứ tự thuộc AB và CD sao cho AM = CN. Chứng minh rằng:

a. AMCN là hình bình hành.

b. Các đường thẳng AC, BD, MN đồng qui.

Bài tập 8. Cho ΔABC, trung tuyến AM. Gọi H và K theo thứ tự là hình chiếu của B và C trên AM. Chứng minh rằng CH // BK.

Bài tập 9. Cho hình bình hành ABCD. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, CD.

a. Chứng minh rằng AMCN là hình bình hành.

b. DB cắt AN và CM theo thứ tự ở I và K. So sánh các độ dài DI, IK, KB.

Bài tập 10. Cho ΔABC. Vẽ ở ngoài tam giác các tam vuông cân tại A là ABD, ACE. Vẽ hình bình hành ADIE. Chứng minh rằng:

a. AI = BC.

b. $AI \perp BC$.

Bài tập 11. Hình bình hành ABCD có $\hat{A} = 130^0$. Vẽ ở ngoài hình bình hành các tam giác đều ABE, ADF.

a. Tính $E\hat{A}F$.

b. Chứng minh rằng ACEF là tam giác đều.

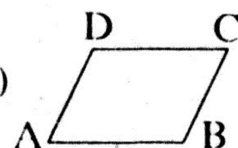
Bài tập 12. Dựng hình bình hành ABCD, biết:

a. AB = 3cm, AD = 5cm, $\hat{A} = 120^0$.

b. AC = 6cm, BD = 4cm, $B\hat{O}C = 130^0$.

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1. Ta có:



$CV_{ABCD} = 18 = AB + BC + CD + DA = 2(AB + AD)$

$\Leftrightarrow AB + AD = 9cm$

$CV_{ABD} = 11 = AB + BD + DA = 11 + BD \Leftrightarrow BD = 2cm$.

Vậy BD = 2cm.

Bài tập 2.

a. Từ giả thiết $\hat{A} = 80^0$ suy ra:

$\hat{C} = \hat{A} = 80^0$,

$\hat{B} = \hat{D} = 180^0 - \hat{A} = 100^0$.

b. Từ giả thiết $\hat{A} - \hat{B} = 20^0$ suy ra

$\hat{A} = 20^0 + \hat{B}$.

Ta có:

$$\hat{A} + \hat{B} = 180^0 \Leftrightarrow 20^0 + \hat{B} + \hat{B} = 180^0 \Leftrightarrow \hat{B} = 80^0.$$

Khi đó, ta được:

$\hat{D} = \hat{B} = 80^0$, $\hat{C} = \hat{A} = 100^0$.

Bài tập 3. *Học sinh tự vẽ hình.*

Dựa trên tính chất đường trung bình của tam giác ta có ngay:

$$MN \overset{//}{=} \frac{1}{2}AC \text{ và } EF \overset{//}{=} \frac{1}{2}AC$$

suy ra $MN \overset{//}{=} EF$, tức MNEF là hình bình hành.

Bài tập 4. *Học sinh tự vẽ hình.*

Dựa trên tính chất đường trung bình của tam giác ta có ngay:

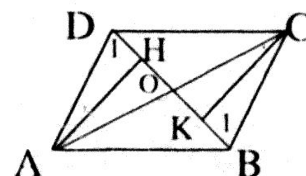
OM // AD

ON // BC // AD

do đó, ba điểm M, O, N thẳng hàng.

Bài tập 5.

a. Ta có ngay AH // CK vì cùng vuông góc với BD.



Xét hai tam giác vuông ΔAHD và ΔCKB, ta có:

AD = BC, tính chất hình bình hành

$\hat{D}_1$ $\hat{B}_1$, so le trong

do đó:

ΔAHD = ΔCKB (cạnh huyền và góc nhọn) ⇒ AH = CK.

Vậy, ta được:

$AH \overset{//}{=} CK \Leftrightarrow$ AHCK là hình bình hành.

b. Với O là trung điểm của HK, suy ra:

O là trung điểm của AC vì AHCK là hình bình hành

⇒ O là trung điểm của BD vì ABCD là hình bình hành.

Bài tập 6. *Học sinh tự vẽ hình.*

a. Dựa trên tính chất đường trung bình của tam giác ta có ngay:

$$ME \overset{//}{=} \frac{1}{2}AC \text{ và } NF \overset{//}{=} \frac{1}{2}AC$$

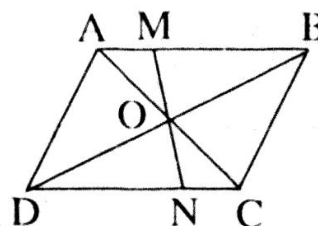
suy ra $ME \overset{//}{=} NF$, tức MENF là hình bình hành.

b. Gọi O là giao điểm của AC, BD

Khi đó, theo kết quả bài tập 4, ta thấy M, N, O thẳng hàng.

Vậy, các đường thẳng AC, BD, MN đồng qui tại O.

Bài tập 7.



a. Từ giả thiết ta có ngay:

$AM \overset{//}{=} CN \Leftrightarrow$ AMCN là hình bình hành.

b. Gọi O là trung điểm của BD, suy ra:

O là trung điểm của AC vì ABCD là hình bình hành

$\Rightarrow$ O là trung điểm của MN vì AMCN là hình bình hành.

Vậy, các đường thẳng AC, BD, MN đồng qui tại O.

Bài tập 8. *Học sinh tự vẽ hình.*

Xét hai tam giác vuông ΔBHM và ΔCKM, ta có:

BM = CM, giả thiết

$\widehat{BMH} = \widehat{CMK}$, đối đỉnh

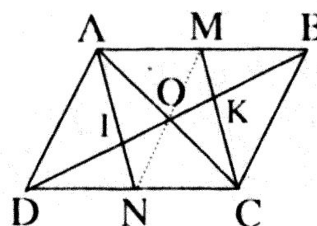
do đó:

$\Delta BHM = \Delta CKM$ (cạnh huyền và góc nhọn) $\Rightarrow$ MH = MK.

Vậy, tứ giác BHCK là hình bình hành vì có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường

$\Rightarrow$ BK // CH, đpcm.

Bài tập 9.



a. Từ giả thiết ta có ngay:

$AM \overset{//}{=} CN \Leftrightarrow$ AMCN là hình bình hành.

b. Gọi O là giao điểm của AC và BD, ta thấy:

OI = OK $\Rightarrow$ IK = 2KO.

Trong ΔABC, ta có K là trọng tâm nên BK = 2KO.

Trong ΔACD, ta có I là trọng tâm nên DI = 2IO = 2KO.

Vậy, ta được DI = IK = KB.

CHỦ ĐỀ 9 ĐỐI XỨNG TÂM

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. HAI ĐIỂM ĐỐI XỨNG QUA MỘT ĐIỂM

***Định nghĩa**: Hai điểm được gọi là đối xứng với nhau qua điểm O nếu O là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm đó.*

A O B

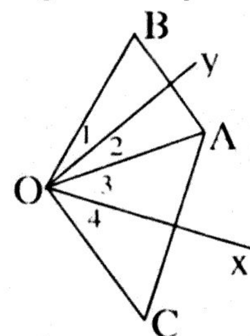
Quy ước: Điểm đối xứng với điểm O qua điểm O cũng là điểm O.

Thí dụ 1: Cho góc xOy và A là một điểm trong của góc đó. Vẽ điểm B đối xứng với A qua Ox, vẽ điểm C đối xứng với A qua Oy.

a. Chứng minh rằng OB = OC.

b. Tìm điều kiện về số đo của góc xOy để B đối xứng với C qua O.

Giải



a. Ta có:

B đối xứng với A qua Ox

$\Rightarrow \Delta OAB$ cân tại O $\Rightarrow$ OA = OB. (1)

C đối xứng với A qua Oy

$\Rightarrow \Delta OAC$ cân tại O $\Rightarrow$ OA = OC. (2)

Từ (1), (2) suy ra OB = OC.

b. Để B đối xứng với C qua O điều kiện là $B\hat{O}C = 180^0$ (O, B, C thẳng hàng).

Như vậy:

$$180^0 = B\hat{O}C = \hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \hat{O}_4 = 2(\hat{O}_2 + \hat{O}_3) = 2x\hat{O}y \Leftrightarrow x\hat{O}y = 90^0.$$

Vậy, với góc $x\hat{O}y = 90^0$ thì B đối xứng với C qua O.

Chú ý: Câu b) trong ví dụ trên muốn nhấn mạnh tới các em học sinh rằng:

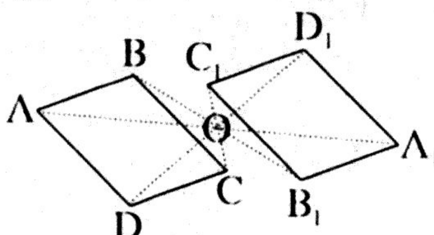
O là trung điểm của BC

$$\Leftrightarrow \begin{cases} O, B, C \text{ thẳng hàng } (O \in BC) \\ OB = OC \end{cases}$$

2. HAI HÌNH ĐỐI XỨNG QUA MỘT ĐIỂM

***Định nghĩa**: Hai hình gọi là đối xứng với nhau qua điểm O nếu mỗi điểm thuộc hình này đối xứng với mỗi điểm thuộc hình kia qua điểm O.*

Khi đó, điểm O được gọi là tâm đối xứng của hai hình.



Ta có kết quả : "*Nếu hai đoạn thẳng (góc, tam giác) đối xứng với nhau qua một điểm thẳng thì chúng bằng nhau*".

Ngoài ra ta có ngay:

1. Nếu A_1B_1 đối xứng với AB qua điểm O thì A_1B_1 // AB hoặc A_1, B_1, A, B thẳng hàng.
2. Nếu ba điểm A, B, C không thẳng hàng thì các điểm A_1, B_1, C_1 đối xứng với chúng qua điểm O cũng không thẳng hàng, thật vậy:
   Ba điểm A, B, C không thẳng hàng nên tồn tại ΔABC, ta có:
   $$A_1B_1 = AB,\ A_1C_1 = AC,\ B_1C_1 = BC.$$
   Các đoạn thẳng AB, AC, BC thoả mãn bất đẳng thức tam giác nên các đoạn thẳng A_1B_1, A_1C_1, B_1C_1 cũng thoả mãn bất đẳng thức tam giác. Vậy A_1, B_1, C_1 không thẳng hàng.

3. HÌNH CÓ TÂM ĐỐI XỨNG

***Định nghĩa**: Điểm O được gọi là tâm đối xứng của hình $\mathcal{H}$ nếu điểm đối xứng với mỗi điểm thuộc hình $\mathcal{H}$ qua điểm O cũng thuộc hình $\mathcal{H}$.*

Ta có kết quả : "*Giao điểm hai đường chéo của hình bình hành là tâm đối xứng của hình bình hành đó*".

Thí dụ 2: Ta có:

1. Với đoạn thẳng AB, có tâm đối xứng là trung điểm O của AB.
2. Với ΔABC đều, có tâm đối xứng là trọng tâm G của nó.
3. Với đường tròn tâm O thì O chính là tâm đối xứng của nó.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho ΔABC, gọi D, E theo thứ tự là trung điểm của AB, AC. Gọi O là điểm bất kì nằm trong ΔABC. Vẽ điểm M đối xứng với O qua D, vẽ điểm N đối xứng với O qua E. Chứng minh rằng MNCB là hình bình hành.

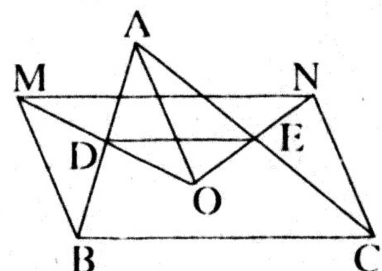
Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách thực hiện sau:

Cách 1: Ta có:

$$\begin{cases} AD = BD \\ AE = CE \end{cases} \Rightarrow DE \overset{//}{=} \frac{1}{2} BC. \quad (1)$$

$$\begin{cases} OD = MD \\ OE = NE \end{cases} \Rightarrow DE \overset{//}{=} \frac{1}{2} MN. \quad (2)$$



Từ (1), (2) suy ra:

$$MN \overset{//}{=} BC \Leftrightarrow \text{MNCB là hình bình hành.}$$

Cách 2: Ta có:

$$\begin{cases} AD = BD \\ MD = OD \end{cases} \Rightarrow \text{AOBM là hình bình hành} \Rightarrow MB \overset{//}{=} AO. \quad (3)$$

$$\begin{cases} AE = CE \\ NE = OE \end{cases} \Rightarrow \text{AOCN là hình bình hành} \Rightarrow CN \overset{//}{=} AO. \qquad (4)$$

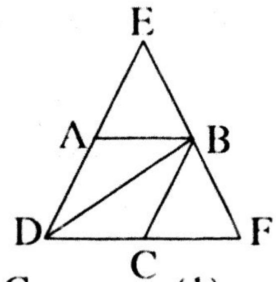
Từ (3), (4) suy ra:

$MB \overset{//}{=} CN \Leftrightarrow$ MNCB là hình bình hành.

Ví dụ 2: Cho hình bình hành ABCD, điểm E đối xứng với D qua A, điểm F đối xứng với D qua C.

a. Chứng minh rằng E đối xứng với F qua B.

b. Hình bình hành ABCD có thêm điều kiện gì thì E đối xứng với F qua đường thẳng DB ?



Giải

a. Ta có:

AE = AD = BC

Vậy, tứ giác AEBC có

$AE \overset{//}{=} BC \Rightarrow$ AEBC là hình bình hành $\Rightarrow BE \overset{//}{=} AC$. (1)

Chứng minh tương tự, ta được $BF \overset{//}{=} AC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra

BE = BF,

E, B, F cùng thuộc một đường thẳng

do đó B là trung điểm của EF $\Rightarrow$ E đối xứng với F qua B.

b. Để E đối xứng với F qua DB

$\Leftrightarrow$ DB là đường trung trực của EF

$\Leftrightarrow$ DE = DF $\Leftrightarrow$ DA = DC.

Vậy, nếu hình bình hành ABCD có thêm điều kiện DA = DC thì E và F đối xứng với nhau qua DB.

Nhận xét:

1. Để chứng tỏ E đối xứng với F qua B, ta chứng minh B là trung điểm của EF. Chú ý rằng nếu chỉ có BE = BF thì chưa đủ kết luận B là trung điểm của EF. Cần chứng minh thêm ba điểm E, B, F thẳng hàng.

2. Ở câu b), ta cần tìm điều kiện để E đối xứng với F qua DB. Tìm điều kiện để một hình có một tính chất nào đó chính là tìm điều kiện cần và đủ để hình có tính chất ấy.

Thường có hai cách trình bày đối với bài toán trên:

Cách 1: Trình bày tách riêng điều kiện cần, điều kiện đủ, rồi kết luận.

Cách 2: Trình bày đồng thời điều kiện cần và đủ.

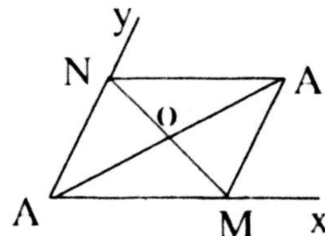
ở lời giải trên, ta đã trình bày bài toán theo cách 2.

Ví dụ 3: Cho góc xAy và O là một điểm trong của góc đó. Hãy dựng qua O một đường thẳng cắt hai cạnh Ax, Ay theo thứ tự tại M, N sao cho O là trung điểm của MN.

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách thực hiện sau:

Cách 1: Ta có các bước:



Phân tích: Giả sử đã dựng được đoạn thẳng MN sao cho OM = ON.

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua O, suy ra AMA_1N là hình bình hành.

Cách dựng: Ta lần lượt thực hiện:

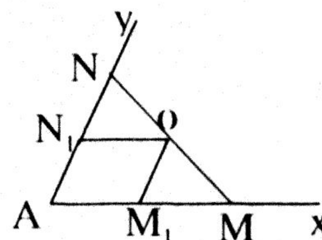
- Dựng A_1 đối xứng với A qua O.
- Qua A_1 dựng đường thẳng song song với Ax, cắt Ay ở N.
- Qua A_1 dựng đường thẳng song song với Ay, cắt Ax ở M.

Khi đó MN là đường thẳng phải dựng.

Chứng minh: Hình bình hành AMA_1N có O là trung điểm của AA_1 nên O là trung điểm của MN.

Biện luận: Bài toán có một nghiệm hình (với điều kiện góc xAy khác góc bẹt).

Cách 2: Ta có các bước:



Phân tích: Giả sử đã dựng được đoạn thẳng MN sao cho OM = ON.

Gọi M_1, N_1 theo thứ tự là trung điểm của AM và AN, suy ra AM_1ON_1 là hình bình hành.

Cách dựng: Ta lần lượt thực hiện:

- Qua O dựng đường thẳng song song với Ax, cắt Ay ở N_1.
- Dựng N đối xứng với A qua N_1.
- NO cắt Ax ở M.

Chứng minh: *Bạn đọc tự chứng minh.*

Biện luận: Bài toán có một nghiệm hình (với điều kiện góc xAy khác góc bẹt).

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Định nghĩa hai điểm đối xứng qua một điểm, hai hình đối xứng qua một điểm.

Câu hỏi 2: Thế nào là hình có tâm đối xứng ?

Câu hỏi 3:

a. Cho ΔABC, các trung tuyến AD, BE, CF cắt nhau tại G. Điểm A có đối xứng với điểm D qua G không? Tìm các cặp điểm đối xứng với nhau qua một điểm.

b. Chỉ ra tâm đối xứng của một đoạn thẳng, hình bình hành, đường tròn.
c. Kể tên một vài chữ cái (in, viết hoa) có tâm đối xứng.
d. Hai đoạn thẳng AB và A'B' đối xứng với nhau qua trục d. Khi nào thì AB // A'B' ?
e. Hai đoạn thẳng AB và A'B' đối xứng với nhau qua điểm O. Khi nào thì AB // A'B' ?

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho ΔABC, trung tuyến AD, trọng tâm G. Điểm E đối xứng với G qua D. Chứng minh rằng điểm E đối xứng với A qua G.

Bài tập 2. Cho ΔABC, các đường trung tuyến AD, BE, CF cắt nhau tại G. Gọi H là điểm đối xứng với G qua D, gọi I là điểm đối xứng với G qua E, gọi K là điểm đối xứng với G qua F. Tìm các điểm đối xứng với A, B, C qua G.

Bài tập 3. Cho ΔABC, các đường trung tuyến BM, CN. Gọi D là điểm đối xứng với B qua M, gọi E là điểm đối xứng với C qua N. Chứng minh rằng điểm E đối xứng với D qua A.

Bài tập 4. Cho hình bình hành ABCD, gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Qua O vẽ đường thẳng cắt hai cạnh AB, CD tại E, F. Qua O vẽ đường thẳng cắt hai cạnh AD, BC tại M, N. Chứng minh rằng EMFN là hình bình hành.

Bài tập 5. Cho hình bình hành ABCD. Lấy điểm E trên cạnh AB, điểm F trên cạnh CD sao cho AE = CF. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng E đối xứng với F qua O.

Bài tập 6. Cho ΔABC, điểm D nằm trên cạnh BC. Vẽ điểm E đối xứng với D qua AB, vẽ điểm F đối xứng với D qua AC.

a. Chứng minh rằng AE = AF.
b. ΔABC có điều kiện gì thì E đối xứng với F qua A?

Bài tập 7. Cho ΔABC, trực tâm H, M là trung điểm của BC. Gọi D là điểm đối xứng với H qua M.

a. Tính $\widehat{ABD}$, $\widehat{ACD}$.
b. Gọi I là trung điểm của AD. Chứng minh rằng I là giao điểm của đường trung trực của ΔABC.

Bài tập 8. Cho ΔABC và M là một điểm thuộc miền trong của tam giác đó. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của AB, AC, BC. Gọi A', B', C' là điểm đối xứng của M lần lượt qua F, E, D. Chứng minh:

a. AB'A'B là hình bình hành.
b. CC' đi qua tâm đối xứng của tứ giác AB'A'B.

Bài tập 9. Cho góc xAy và điểm G nằm trong góc ấy. Dựng điểm B thuộc tia Ax, điểm C thuộc tia Ay sao cho G là trọng tâm của ΔABC.

Bài tập 10. Cho ΔABC, điểm M nằm trên cạnh BC. Gọi O là trung điểm của AM. Dựng điểm E thuộc cạnh AB, điểm F thuộc cạnh AC sao cho E đối xứng với F qua O.

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1. *Học sinh tự làm* hoặc tham khảo lời giải bài tập 2.

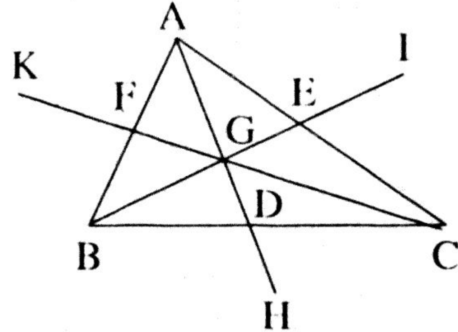
Bài tập 2. Ta có:

- Vì H là điểm đối xứng với G qua D nên:

  GD = HD ⇒ GH = 2GD.

- Theo tính chất đường trung tuyến:

  GA = 2GD = GH.



Vậy, H là điểm đối xứng với A qua G.

Tương tự ta cũng có kết luận:

- I là điểm đối xứng với G qua G.
- K là điểm đối xứng với C qua G.

Bài tập 3. Ta lần lượt có:

- Tứ giác ABCD là hình bình hành vì có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường, suy ra:

  $AD \overset{//}{=} BC.$ (1)

- Tứ giác ACBE là hình bình hành vì có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường, suy ra:

  $AE \overset{//}{=} BC.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

A, D, E thẳng hàng và AD = AE

do đó, E đối xứng với D qua A.

Bài tập 4. *Học sinh tự vẽ hình.*

Vì O là tâm đối xứng của hình bình hành ABCD, nên:

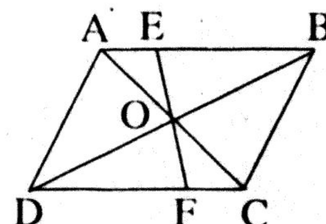
OE = OF

OM = ON

suy ra, tứ giác EMFN là hình bình hành vì có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

Bài tập 5. Từ giả thiết ta có ngay:

$AE \overset{//}{=} CF$ ⇔ AECF là hình bình hành.



Vì O là trung điểm của AC, suy ra:

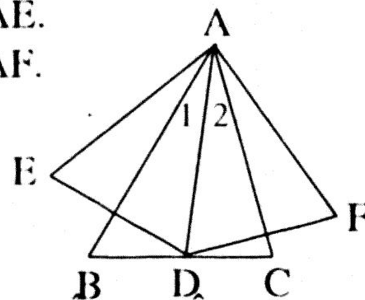
O là trung điểm của EF ⇔ E đối xứng với F qua O.

Bài tập 6.

a. Ta lần lượt có:

- Vì D đối xứng với E qua AB nên AD = AE.
- Vì D đối xứng với F qua AC nên AD = AF.

Suy ra AE = AF.



b. Để E đối xứng với F qua A điều kiện là:

A, E, F thẳng hàng $\Leftrightarrow \widehat{EAF} = 180^0$.

Mặt khác, ta có:

$\widehat{EAF} = \widehat{DAE} + \widehat{DAF} = 2\hat{A}_1 + 2\hat{A}_2 = 2(\hat{A}_1 + \hat{A}_2) = 2\hat{A}$.

Vậy, ta cần có điều kiện:

$2\hat{A} = 180^0 \Leftrightarrow \hat{A} = 90^0 \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông tại A.

Bài tập 7. $\widehat{ABD} = \widehat{ACD} = 90^0$.

CHỦ ĐỀ 10

HÌNH CHỮ NHẬT

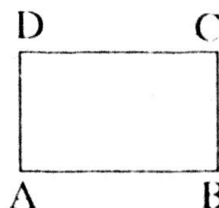
I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỊNH NGHĨA

Hình chữ nhật là tứ giác có bốn góc vuông.

Như vậy, nếu ABCD là hình chữ nhật thì:

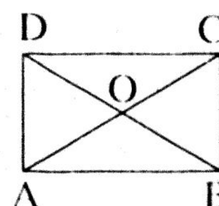
1. ABCD là một hình thang cân.
2. ABCD là một hình bình hành.



2. CÁC TÍNH CHẤT

Hình chữ nhật có đầy đủ các tính chất của hình thang cân, của hình bình hành, từ đó ta có tính chất tổng quát:

Trong hình chữ nhật, hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.



3. CÁC DẤU HIỆU NHẬN BIẾT

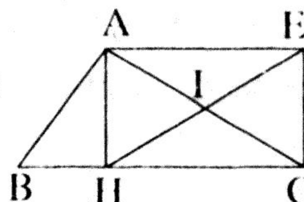
1. *Tứ giác có ba góc vuông là hình chữ nhật.*
2. *Hình thang cân có một góc vuông là hình chữ nhật.*
3. *Hình bình hành có một góc vuông là hình chữ nhật.*
4. *Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau là hình chữ nhật.*

Thí dụ 1: Cho ΔABC, đường cao AH. Gọi I là trung điểm của AC, E là điểm đối xứng với H qua I. Tứ giác AHCE là hình gì ? Vì sao ?

Giải

Tứ giác AHCE là hình chữ nhật, để khẳng định điều này chúng ta có thể sử dụng một trong các cách sau:

Cách 1: Sử dụng dấu hiệu thứ nhất.



Với ΔAHC vuông tại H có trung tuyến HI, do đó:

$$\frac{1}{2}AC = HI = EI \Leftrightarrow \Delta AEC \text{ vuông tại E.}$$

$$AI = \frac{1}{2}AC = HI = \frac{1}{2}HE \Leftrightarrow \Delta AHE \text{ vuông tại A.}$$

Vậy, tứ giác AHCE có ba góc vuông (là $\hat{A}$, $\hat{H}$, $\hat{E}$) do đó nó là hình chữ nhật.

Cách 2: Sử dụng dấu hiệu thứ hai.

Ta có:

AH đối xứng với CE qua I $\Rightarrow$ AH // CE.

AE đối xứng với CH qua I $\Rightarrow$ AE = CH.

Vậy, tứ giác AHCE là hình thang cân và ngoài ra nó có một góc vông ($\hat{H} = 90^0$) nên nó là hình chữ nhật.

Cách 3: Sử dụng dấu hiệu thứ ba.

Ta có:

AH đối xứng với CE qua I ⇒ AH = CE.

AE đối xứng với CH qua I ⇒ AE = CH.

Vậy, tứ giác AHCE có các cặp cạnh đối bằng nhau do đó nó là hình bình hành và ngoài ra nó có một góc vông ($\hat{H} = 90^0$) nên nó là hình chữ nhật.

Cách 4: Sử dụng dấu hiệu thứ ba.

Ta có:

AH đối xứng với CE qua I ⇒ AH $\overset{//}{=}$ CE

⇒ AHCE là hình bình hành.

Ngoài ra, tứ giác AHCE có một góc vông ($\hat{H} = 90^0$) nên nó là hình chữ nhật.

Cách 5: Sử dụng dấu hiệu thứ bốn.

Ta có:

AH đối xứng với CE qua I ⇒ AH $\overset{//}{=}$ CE

⇒ AHCE là hình bình hành.

$\frac{1}{2}$AC = HI = EI ⇒ AC = HE.

Vậy, hình bình hành AHCE có hai đường chéo bằng nhau do đó nó là hình chữ nhật.

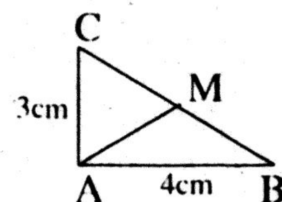
4. ÁP DỤNG VÀO TAM GIÁC

Ta có các kết quả khi áp dụng vào tam giác:

1. Trong tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền.
2. Nếu một tam giác có đường trung tuyến ứng với một cạnh bằng nửa cạnh ấy thì tam giác đó là tam giác vuông.

Thí dụ 2: Tính độ dài đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của một tam giác vuông có các cạnh góc vuông bằng 4cm, 3cm.

Giải



Với ΔABC vuông tại A, ta có:

- Theo định lí Pi - ta — go thì:

  $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 4^2 + 3^2 = 25$

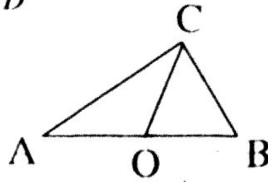
  ⇒ BC = 5cm,

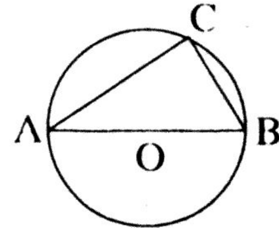
- Theo tính chất của đường trung tuyến trong tam giác vuông thì:

  $AM = \frac{1}{2}BC = 2,5cm.$

Vậy, độ dài đường trung tuyến trong tam giác bằng 2,5cm.

Nhận xét: 1. Từ kết quả " *Trong tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền* " giúp chúng ta khẳng định được rằng " *Nếu ΔABC vuông tại C thì điểm C thuộc đường tròn có đường kính AB*"





2. Từ kết quả " *Nếu một tam giác có đường trung tuyến ứng với một cạnh bằng nửa cạnh ấy thì tam giác đó là tam giác vuông* " giúp chúng ta khẳng định được rằng " *Nếu điểm C thuộc đường tròn đường kính AB thì ΔABC vuông tại C*".

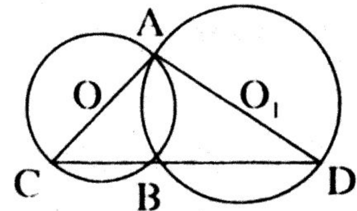
Thí dụ 3: Chứng minh rằng ba điểm B, C, D trên hình bên thẳng hàng.

Giải

Nhận xét rằng:

- $B \in (AC) \Rightarrow \widehat{ABC} = 90^0$.
- $B \in (AD) \Rightarrow \widehat{ABD} = 90^0$.

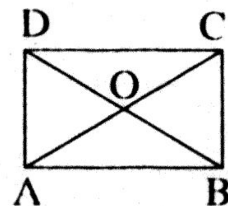
Vậy, ba điểm B, C, D thẳng hàng.



II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Hình chữ nhật ABCD có cạnh AD bằng một nửa đường chéo AC. Tính góc nhọn tạo bởi hai đường chéo của hình chữ nhật.

Giải



Trong ΔABD, ta có:

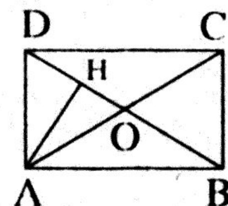
$$OA = \frac{1}{2}BD = OD = \frac{1}{2}AC = AD$$

do đó ΔOAD đều $\Rightarrow \widehat{AOD} = 60^0$.

Vậy, số đo góc nhọn tạo bởi hai đường chéo của hình chữ nhật bằng 60^0.

Ví dụ 2: Hình chữ nhật ABCD. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ A xuống BD. Biết HD = 2cm, HB = 6cm. Tính độ dài các cạnh AB, AD.

Giải



Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Đặt AD = x và sử dụng định lí Pitago cho các tam giác ΔAHD, ΔAHB, ΔABD ta có:

$$AH^2 = AD^2 - DH^2 = x^2 - 2^2 = x^2 - 4$$
$$= AB^2 - BH^2 = BD^2 - AD^2 - BH^2 = (2+6)^2 - x^2 - 36 = 28 - x^2$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 = 32 \Leftrightarrow x = 4cm \Rightarrow AD = 4cm \Rightarrow AB = \sqrt{BD^2 - AD^2} = \sqrt{48}\ cm.$$

Vậy, ta có AD = 4cm, AB = $\sqrt{48}$ cm.

Cách 2: Nhận xét rằng:

$$OA = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}(BH + HD) = 4cm$$

$$\Rightarrow OD = 4cm \Rightarrow OH = 2cm = HD \Rightarrow AD = AO = 4cm.$$

Trong ΔABD vuông tại A, ta có:

$$AB = \sqrt{BD^2 - AD^2} = \sqrt{48}\text{ cm}.$$

Vậy, ta có AD = 4cm, AB = $\sqrt{48}$ cm.

Ví dụ 3: Cho ΔABC vuông cân tại A, AB = 8cm, điểm M thuộc cạnh BC. Gọi D, E theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ M đến AB, AC.

a. Tứ giác ADME là hình gì ? Tính chu vi tứ giác đó.

b. Tìm vị trí của điểm M trên BC để đoạn DE có độ dài nhỏ nhất.

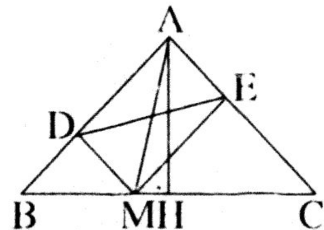
Giải

a. Ta thấy ngay, tứ giác ADME có ba góc vuông do đó nó là hình chữ nhật.

Trong ΔBDM vuông tại D có:

$\hat{B} = 45^0 \Rightarrow \Delta BDM$ vuông cân tại D

$\Rightarrow DM = DB.$



Khi đó:

$$CV_{ADME} = 2(AD + DM) = 2(AD + DB) = 2AB = 16cm.$$

b. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên BC (H là trung điểm BC), ta có:

$$DE = AM \le AH \Rightarrow DE_{Min} = AH \text{ đạt được khi } M \equiv H.$$

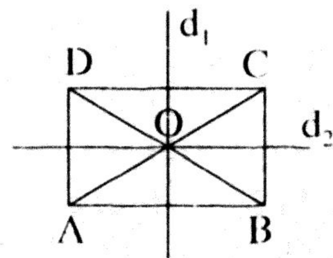
Vậy, DE có độ dài nhỏ nhất khi M là trung điểm của BC.

Ví dụ 4: Chứng minh rằng trong hình chữ nhật:

a. Giao điểm của hai đường chéo là tâm đối xứng.

b. Hai đường thẳng đi qua giao điểm của hai đường chéo và vuông góc với các cạnh đối là trục đối xứng.

Giải



Xét hình chữ nhật ABCD có O là giao điểm hai đường chéo.

a. ABCD là hình bình hành nên O là tâm đối xứng của hình.

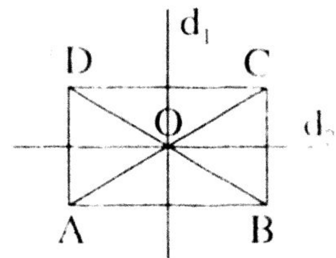
b. ABCD là hình thang cân.

- Xét AB và CD là đáy, suy ra đường thẳng d_1 qua O và vuông góc với CD sẽ đi qua trung điểm của CD và AB nên d_1 là trục đối xứng.
- Tương tự như trên đối với đường thẳng d_2 đi qua O và vuông góc với AD.

Ví dụ 5: Chứng minh rằng nếu một tứ giác có hai trục đối xứng vuông góc với nhau và không đi qua đỉnh của tứ giác thì tứ giác đó là hình chữ nhật.

Giải

Xét tứ giác ABCD có các trục đối xứng d_1, d_2 vuông góc với nhau tại O, điểm A không thuộc d_1 và d_2.



B đối xứng với A qua d_1, D đối xứng với A qua d_2 nên ta chứng minh được O là trung điểm của BD và OA = OB = OD.

Tương tự OA = OB = OC và O là trung điểm của AC.

Vậy, ABCD có hai đường bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên nó là hình chữ nhật.

Chú ý: Từ bài toán trên, ta có cách gấp để kiểm tra một tờ giấy hình tứ giác có phải là một hình chữ nhật hay không: gấp tờ giấy theo đường thẳng d_1 (đỉnh của tứ giác không thuộc nếp gấp). Nếu hai phần của tờ giấy trùng nhau, ta gấp tiếp tờ giấy theo d_2 (đỉnh của tứ giác không thuộc nếp gấp). Nếu hai phần của tờ giấy vẫn trùng nhau, ta kết luận tứ giác là hình chữ nhật.

Ví dụ 6: Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH, đường trung tuyến AM. Gọi D, E theo thứ tự là chân đường vuông góc kẻ từ H đến AB, AC. Chứng minh rằng:

a. AH = DE.

b. $\widehat{HAB} = \widehat{MAC}$.

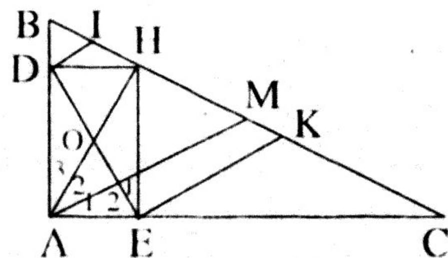
c. $AM \perp DE$.

d. DI // EK với I là trung điểm của HB và K là trung điểm của HC.

Giải

a. Nhận xét rằng, tứ giác ADHE có ba góc vuông nên là hình chữ nhật, do đó AH = DE.

b. Trong ΔABC, ta có:



$$AM = \frac{1}{2}BC = CM$$

$\Leftrightarrow \Delta AMC$ cân tại M $\Leftrightarrow \widehat{MAC} = \widehat{C}$.

Mặt khác:

$\widehat{HAB} = \widehat{C}$ (cùng phụ với góc $\widehat{B}$).

suy ra $\widehat{HAB} = \widehat{MAC}$.

c. Để chứng minh $AM \perp DE$, ta đi chứng minh $\widehat{E}_2 + \widehat{A}_1 = 90^0$.

Thật vậy:

$$\widehat{E}_2 + \hat{A}_1 = \widehat{E}_2 + \hat{A}_3 = \widehat{E}_2 + \widehat{E}_1 = 90^0.$$

Vậy, ta có $AM \perp DE$.

d. Trong ΔHEC vuông tại C, ta có:

$$EK = \frac{1}{2}.HC = CK \Leftrightarrow \Delta KEC \text{ cân tại K} \Leftrightarrow \widehat{KEC} = \widehat{C} = \hat{A}_1$$

$\Rightarrow KE // AM \Rightarrow KE \perp DE.$ (1)

Chứng minh tương tự, ta được $DI \perp DE$. (2)

Từ (1), (2) suy ra DI // EK.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Phát biểu định nghĩa hình chữ nhật. Chỉ rõ trục đối xứng, tâm đối xứng của hình chữ nhật.

Câu hỏi 2: Gọi:

T là tập hợp các hình thang,
B là tập hợp các hình bình hành,
C là tập hợp các hình thang cân,
N là tập hợp các hình chữ nhật.

a. Dùng kí hiệu $\subset$ để thực hiện quan hệ giữa tập hợp B với các tập hợp T, C, N.

b. Hãy xác định $B \cap C$, $B \cap N$, $C \cup N$.

Câu hỏi 3: Phát biểu tính chất đường chéo hình chữ nhật. Nêu rõ tính chất nào có ở hình bình hành, tính chất nào có ở hình thang cân.

Câu hỏi 4: Phát biểu các dấu hiệu nhận biết hình chữ nhật.

Câu hỏi 5: Cho tứ giác ABCD. Nếu có các đoạn thẳng bằng nhau nào thì kết luận được tứ giác là hình chữ nhật ?

Câu hỏi 6: Các mệnh đề sau đúng hay sai? Nếu sai, hãy sửa lại cho đúng:

1. Hình thang cân có hai đường chéo bằng nhau là hình chữ nhật.
2. Tứ giác có hai đường chéo bằng nhau là hình chữ nhật.
3. Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau là hình chữ nhật.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Tính đường chéo d của hình chữ nhật, biết độ dài các cạnh

a. $a = 9cm$, $b = 12cm$.

b. $a = \frac{1}{2}cm$, $b = \frac{2}{3}cm$.

Bài tập 2. Tính độ dài đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của một tam giác vuông có các cạnh góc vuông bằng:

a. 5cm và 10cm.

b. 24cm và 7cm.

Bài tập 3. Hình chữ nhật ABCD. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ A xuống BD. Biết $HB = 9cm$, $HD = 3cm$. Tính độ dài các cạnh AB, AD.

Bài tập 4. Cho ΔABC vuông cân tại A, $AB = 6cm$, điểm M thuộc cạnh BC. Gọi D, E theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ M đến AB, AC.

a. Tứ giác ADME là hình gì ? Tính chu vi tứ giác đó.

b. Tìm vị trí của điểm M trên BC để đoạn DE có độ dài nhỏ nhất.

Bài tập 5. Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo vuông góc với nhau. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng EFGH là hình chữ nhật.

Bài tập 6. Chứng minh rằng các tia phân giác của các góc của một hình bình hành cắt nhau tạo thành một hình chữ nhật (hai cạnh kề của hình bình hành không bằng nhau).

Bài tập 7. Cho tứ giác ABCD có AB vuông góc với CD. Gọi M, N, P, Q theo thứ tự trung điểm của BC, BD, AD, AC. Chứng minh rằng MP = NQ.

Bài tập 8. Cho ΔABC vuông tại A, điểm D thuộc cạnh AB, điểm E thuộc cạnh AC. Gọi M, N, P, Q theo thứ tự trung điểm của DE, BE, BC, DC. Chứng minh rằng MP = NQ.

Bài tập 9. Cho ΔABC cân tại A, các đường trung tuyến BM, CN cắt nhau tại G. Gọi D, E theo thứ tự là điểm đối xứng với G qua M, N. Chứng minh rằng BCDE là hình chữ nhật.

Bài tập 10. Cho ΔABC nhọn, các đường cao BD, CE. Gọi H, K theo thứ tự là chân đường vuông góc kẻ từ B, C đến đường thẳng DE. Chứng minh rằng EH = DK.

Bài tập 11. Cho ΔABC, đường cao AH. Gọi D, I, K, M, N theo thứ tự là trung điểm của BC, AB, AC, HC, HB. Chứng minh rằng:

a. IKDH là hình thang cân.

b. IM = KN.

Bài tập 12. Xét tứ giác ABCD có các trục đối xứng d_1, d_2 vuông Cho hình chữ nhật ABCD, O là giao điểm hai đường chéo. Qua điểm I thuộc đoạn thẳng OA, kẻ đường thẳng song song với BD, cắt AD và AB theo thứ tự ở E và F.

a. Chứng minh rằng IE = IF.

b. Gọi K, M theo thứ tự là trung điểm của BE, DF. Xác định dạng của tứ giác IKOM.

Bài tập 13. Dựng hình chữ nhật ABCD, biết:

a. AC = 6cm, góc tạo bởi hai đường céo bằng 110^0.

b. BD = 4cm, góc tạo bởi hai đường céo bằng 80^0.

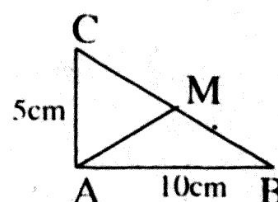
V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. 15cm.

b. $\frac{5}{6}$ cm.

Bài tập 2.



a. Với ΔABC vuông tại A, ta có:

- Theo định lí Pi - ta — go thì:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 10^2 + 5^2 = 125$$

$$\Rightarrow BC = 5\sqrt{5} \text{ cm},$$

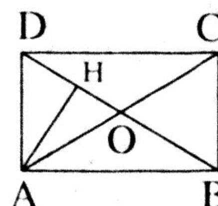
- Theo tính chất của đường trung tuyến trong tam giác vuông thì:

$$AM = \frac{1}{2}BC = \frac{5\sqrt{5}}{2}\text{cm}.$$

Vậy, độ dài đường trung tuyến trong tam giác bằng $\frac{5\sqrt{5}}{2}$ cm.

b. Tượng tự câu a).

Bài tập 3. Đặt AD = x và sử dụng định lí Pitago cho các tam giác ΔAHD, ΔAHB, ΔABD ta có:



$AH^2 = AD^2 - DH^2 = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$

$= AB^2 - BH^2 = BD^2 - AD^2 - BH^2$

$= (9 + 3)^2 - x^2 - 81 = 63 - x^2$

$\Leftrightarrow 2x^2 = 72 \Leftrightarrow x = 6\text{cm}$

$\Rightarrow AD = 6\text{cm} \Rightarrow AB = \sqrt{BD^2 - AD^2} = \sqrt{108}$ cm.

Vậy, ta có AD = 6cm, AB = $\sqrt{108}$ cm.

Bài tập 4. Tham khảo ví dụ 3.

Bài tập 5. *Học sinh tự vẽ hình.*

Trước tiên, dựa trên tính chất đường trung bình của tam giác ta có ngay:

$$EF \overset{//}{=} \frac{1}{2}AC \text{ và } GH \overset{//}{=} \frac{1}{2}AC \Rightarrow EF \overset{//}{=} GH$$

$\Leftrightarrow$ EFGH là hình bình hành.

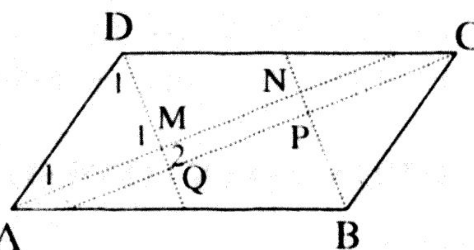
Gọi O là giao điểm của AC và BD, ta có:

$\widehat{AOB} = 90^0$, vì AC vuông góc với BD.

$\widehat{HEF} = \widehat{BOA} = 90^0$, vì góc có cạnh tương ứng song song.

Vậy, hình bình hành EFGH có một góc vuông nên nó là hình chữ nhật.

Bài tập 6. Giả sử các đường phân giác của hình bình hành cắt nhau tại M, N, P, Q.



Thấy ngay MNPQ là hình bình hành bởi nó có các cặp cạnh đối song song với nhau.

Mặt khác, ta có:

$$\hat{M}_2 = \hat{M}_1 = 180^0 - (\hat{A}_1 + \hat{D}_1)$$

$$= 180^0 - (\frac{1}{2}\hat{A} + \frac{1}{2}\hat{D})$$

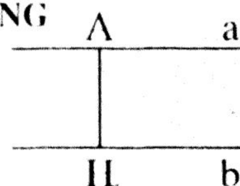
$$= 180^0 - \frac{1}{2}(\hat{A} + \hat{D}) = 180^0 - \frac{1}{2}.180^0 = 90^0.$$

Vậy, hình bình hành MNPQ có một góc vuông nên nó là hình chữ nhật.

CHỦ ĐỀ 11 ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MỘT ĐƯỜNG THẲNG CHO TRƯỚC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG



> ***Định nghĩa**: Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song là khoảng cách từ một điểm tuỳ ý trên đường thẳng này đến đường thẳng kia.*

2. TÍNH CHẤT CỦA CÁC ĐIỂM CÁCH ĐỀU MỘT ĐƯỜNG THẲNG CHO TRƯỚC

Ta có kết quả:

> *Các điểm cách đường thẳng b một khoảng bằng h nằm trên hai đường thẳng song song với b và cách b một khoảng bằng h.*

Tập hợp điểm còn lại được gọi là quỹ tích. Ở lớp 7 chúng ta đã được làm quen với ba quỹ tích cơ bản:

1. *Quỹ tích đường trung trực: Quỹ tích các điểm cách đều hai đầu của đoạn thẳng AB cho trước là đường trung trực của đoạn thẳng ấy.*
2. *Quỹ tích đường tròn: Quỹ tích các điểm cách đều điểm O cho trước một khoảng R không đổi là đường tròn tâm O bán kính R.*
3. *Quỹ tích tia phân giác: Quỹ tích các điểm nằm trong một góc và cách đều hai cạnh của góc là tia phân giác của góc ấy.*

Với kiến thức về hình chữ nhật, ta có thêm quỹ tích đường thẳng song song: " *Quỹ tích các điểm cách đường thẳng d cho trước một khoảng h cho trước là hai đường thẳng song song với d và cách d một khoảng h* ".

Thí dụ 1: Cho góc xOy khác góc bẹt, điểm A cố định thuộc tia Oy, điểm B di chuyển trên Ox. Gọi M là điểm đối xứng với A qua B. Tìm quỹ tích của điểm M.

Giải

Phần thuận: Ta thực hiện:

- Kẻ $AH \perp Ox$ ($H \in Ox$), đặt AH = h (không đổi).
- Kẻ $MK \perp Ox$ ($K \in Ox$), ta có:

$\Delta MKB = \Delta AHB$ (trường hợp cạnh huyền và góc nhọn)

$\Rightarrow MK = AH = h$.

Điểm M cách đường thẳng Ox cố định một khoảng h không đổi nên M thuộc đường thẳng song song với Ox, cách Ox một khoảng h.

Giới hạn: Khi B trùng O thì M trùng I (I đối xứng với A qua O).

Do B chỉ di chuyển trên tia Ox nên M chỉ di chuyển trên tia Iz.

Phần đảo: Lấy điểm M bất kì thuộc tia Iz // Ox cách Ox một khoảng h (I đối xứng với A qua O).

Kẻ MK ⊥ Ox, ta có:

$\Delta MKB = \Delta AHB$ (g.c.g) $\Rightarrow MB = AB$.

Vậy M đối xứng với A qua B.

Kết luận: Khi B di chuyển trên tia Ox, quỹ tích của M là tia Iz song song với Ox, cách Ox một khoảng h (h là khoảng cách từ A đến Ox, I đối xứng với A qua O).

Nhận xét: 1. Để chứng tỏ quỹ tích các điểm M có tính chất nêu trong đề bài (M đối xứng với A qua điểm B thuộc tia Ox) là tia Iz, ta phải thực hiện hai phần:

Phần 1: M có tính chất nêu trong đề bài ⇒ M thuộc tia Iz.

Phần 2: M thuộc tia Iz ⇒ M có tính chất nêu trong đề bài.

Ở đó:

- Phần 1 nhằm đảm bảo tia Iz không chứa thiếu điểm M nào có tính chất nêu trong đề bài.
- Phần 2 nhằm đảm bảo tia Iz không chứa thừa điểm M nào có tính chất nêu trong đề bài.

Như vậy, các bước trình bày một bài toán quỹ tích bao gồm:

Phần thuận: Ta có:

- Gọi M là điểm có tính chất α nêu trong đề bài. Phát hiện quan hệ giữa điểm M với các hình cố định.
- Dựa vào các quỹ tích đã học, chỉ ra M thuộc một hình nào đó, chẳng hạn hình H.
- Giới hạn, nếu điểm m không thuộc toàn bộ hình H mà chỉ thuộc hình H_1, một tập hợp con của hình H.

Phần đảo: Ta có:

- Lấy điểm M bất kì thuộc hình H_1. Bằng cách vẽ hình, tạo ra các điểm chuyển động khác được nêu trong bài toán.
- Chứng minh rằng điểm M có tính chất α.

Kết luận: Quỹ tích các điểm M là hình H_1.

2. Trong thí dụ trên, tính chất α là: " *M đối xứng với điểm A cố định qua điểm B thuộc tia Ox* ", hình H là đường thẳng song song với Ox và cách Ox một khoảng h, hình H_1 là tia Iz thuộc đường thẳng song song với Ox nói trên.

3. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG CÁCH ĐỀU

Định nghĩa: *Những đường thẳng song song chắn trên một đường thẳng cho trước những đoạn thẳng liên tiếp bằng nhau được gọi là những đường thẳng song song cách đều.*

Ta có các kết quả:

1. Nếu các đường thẳng song song cách đều cắt một đường thẳng thì chúng chắn trên đường thẳng đó các đoạn thẳng liên tiếp bằng nhau.
2. Nếu các đường thẳng song song cắt một đường thẳng và chúng chắn trên đường thẳng đó các đoạn thẳng liên tiếp bằng nhau thì chúng song song cách đều.

Thí dụ 2: Cho đoạn thẳng AB. Kẻ tia Ax bất kì. Trên tia Ax lấy các điểm C, D, E sao cho AC = CD = DE. Qua C, D kẻ các đường thẳng song song với BE. Chứng minh rằng đoạn thẳng AB bị chia thành ba phần bằng nhau.

Giải

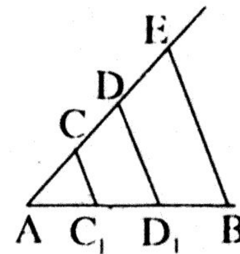
Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Sử dụng tính chất của đường trung bình của tam giác và hình thang.

Ta có:

$$\begin{cases} AC = DC \\ CC_1 // DD_1 \end{cases} \Rightarrow AC_1 = C_1D_1. \quad (1)$$

$$\begin{cases} CD = ED \\ CC_1 // DD_1 // EB \end{cases} \Rightarrow C_1D_1 = D_1B. \quad (2)$$



Từ (1), (2) suy ra $AC_1 = C_1D_1 = D_1B$.

Cách 2: Sử dụng tính chất của các đường thẳng song song cách đều.

Ta có:

$$\begin{cases} AC = CD = DE \\ CC_1 // DD_1 // EB \end{cases} \Leftrightarrow CC_1, DD_1, EB \text{ là song song cách đều}$$

$$\Rightarrow AC_1 = C_1D_1 = D_1B.$$

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho góc xOy cố định, điểm A di chuyển trên tia Ox, điểm B di chuyển trên tia Oy sao cho OA = OB. Kẻ đường vuông góc với Ox tại A, kẻ đường vuông góc với Oy tại B. Tìm quỹ tích giao điểm của hai đường vuông góc trên.

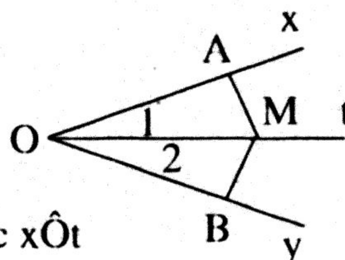
Hướng dẫn

Nhận xét rằng:

$\Delta OAM = \Delta OBM$ (c.c.c)

$\Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$

$\Leftrightarrow$ M thuộc tia phân giác Ot của góc xÔt

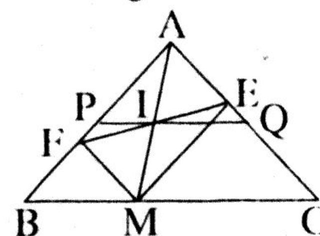


Ví dụ 2: Cho ΔABC, điểm M di chuyển trên cạnh BC. Gọi I là trung điểm của AM.

a. Điểm I di chuyển trên đường nào ?

b. Kẻ Mx song song với AB và cắt AC tại E, kẻ My song song với AC và cắt AB tại F. Trung điểm của EF di chuyển trên đường nào ?

Giải



a. Qua I kẻ đường thẳng song song với BC, cắt các cạnh AB, AC theo thứ tự tại P, Q.

Trong ΔABM, ta có:

$$\begin{cases} AI = MI \\ PI \parallel BM \end{cases} \Rightarrow AP = BP \text{ (P là trung điểm AB - cố định).}$$

Trong ΔACM, ta có:

$$\begin{cases} AI = MI \\ EI \parallel CM \end{cases} \Rightarrow AQ = CQ \text{ (Q là trung điểm AC - cố định).}$$

Vậy, điểm I điểm I di chuyển trên đoạn thẳng PQ.

b. Tứ giác AEMF có các cặp cạnh đối song song do đó nó là hình bình hành. Khi đó, EF và AM cắt nhau tại trung điểm mỗi đường nên I là trung điểm của EF.

Vậy, trung điểm của EF di chuyển trên đoạn thẳng PQ.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Phát biểu các quỹ tích: đường tròn, tia phân giác của một góc, đường trung trực của một đoạn thẳng, đường thẳng song song.

Câu hỏi 2: Xét các hình chữ nhật ABCD có cạnh AD cố định. Hãy nêu quỹ tích của giao điểm hai đường chéo (không cần chứng minh).

Câu hỏi 3: Xét các tam giác ABC có cạnh BC cố định. Hãy nêu quỹ tích của đỉnh A (không cần chứng minh) biết:

a. Cạnh AB = a.

b. Đường cao AH = h.

c. ΔABC cân có đáy BC

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Chứng minh định lí " *Ba đường thẳng song song cách đều chắn trên một đường thẳng bất kì hai đoạn thẳng liên tiếp bằng nhau* ".

Áp dụng:

1. Cho ΔABC, trung tuyến AM. Gọi O là trung điểm của AM. Vẽ đường thẳng d đi qua O và cắt các cạnh AB, AC.

a. Gọi B', C', M' thứ tự là hình chiếu của B, C, M trên d. So sánh MM' với BB' + CC'.

b. Gọi A' là hình chiếu của A trên d. So sánh AA' với BB' + CC'.

2. Cho ΔABC có ba góc nhọn, các đường cao BD, CE. Gọi B', C' thứ tự là các hình chiếu của B, C trên DE. Gọi H là trung điểm của DE. Chứng minh rằng H cũng là trung điểm của B'C'.

Bài tập 2. Hình chữ nhật ABCD có cạnh AB cố định, các đường chéo cắt nhau tại O. Tìm quỹ tích trung điểm M của OB.

Bài tập 3. Cho đường thẳng a và điểm A nằm ngoài đường thẳng. B là điểm di chuyển trên đường thẳng a. Trên tia đối của tia BA lấy điểm M sao cho $BM = \frac{1}{2}BA$. Tìm quỹ tích của điểm M.

Bài tập 4. Cho góc xOy cố định, điểm A cố định thuộc tia Oy, điểm B di chuyển trên tia Ox. Tìm quỹ tích trọng tâm G của tam giác AOB.

Bài tập 5. Cho ΔABC vuông tại A, điểm M di chuyển trên cạnh BC. Gọi ME là đường vuông góc kẻ từ M đến AB, MF là đường vuông góc kẻ từ M đến AC, I là trung điểm EF.

a. Chứng minh rằng ba điểm A, I, M thẳng hàng.

b. Điểm I di chuyển trên đường nào ?

c. Điểm M ở vị trí nào trên cạnh BC thì EF có độ dài nhỏ nhất.

Bài tập 6. Cho góc vuông xOy cố định, điểm A cố định thuộc tia Ox, điểm B di chuyển trên tia Oy. Vẽ ΔABC vuông cân tại A (C và O nằm khác phía đối với AB). Tìm quỹ tích điểm C.

Bài tập 7. Cho đoạn thẳng AB, điểm M di chuyển trên đoạn thẳng ấy. Vẽ về một phía của AB các tam giác đều AMD, BME. Trung điểm K của DE di chuyển trên đường nào ?

Bài tập 8. Cho ΔABC có cạnh AB cố định, BC = 4cm. Gọi M là trung điểm của BC, D là điểm đối xứng với A qua M. Tìm qũy tích của điểm D.

Bài tập 9. Cho đường thẳng a và điểm A nằm ngoài đường thẳng, gọi H là hình chiếu của A trên đường thẳng a. Một đường thẳng b thay đổi vị trí nhưng luôn đi qua A. Gọi M là điểm đối xứng với H qua đường thẳng b. Tìm quỹ tích của điểm M.

Bài tập 10. Cho hình chữ nhật ABCD. Hai tia Ax, Ay thay đổi, luôn vuông góc với nhau, Ax cắt đường thẳng CD ở E, Ay cắt đường thẳng CB ở F. Tìm quỹ tích trung điểm M của EF.

Bài tập 11. Cho góc vuông xOy cố định. Điểm A cố định thuộc tia Oy, điểm B di chuyển trên tia Ox. Vẽ tam giác ABC vuông cân có cạnh huyền AB (C và O khác phía đối với AB). Tìm quỹ tích của điểm C.

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

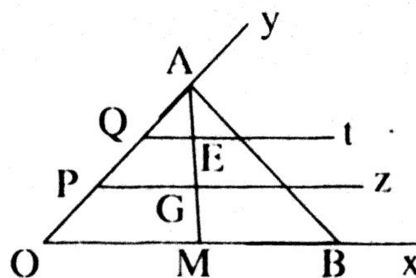
Bài tập 1. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 2. Quỹ tích của M là đường thẳng b vuông góc với AB và cách A một khoảng $\frac{3AB}{4}$.

Bài tập 3. Quỹ tích của M là đường thẳng b (thuộc nửa mặt phẳng bờ a không chứa điểm A) song song với a, cách a một khoảng $\frac{h}{2}$ (h là khoảng cách từ A đến a).

Bài tập 4. Gọi E là trung điểm của AG, suy ra AE = EG = GM.

Qua G, E kẻ các tia Gz, Et song song với Ox, cắt OA theo thứ tự tại tại P và Q, ta có ngay:

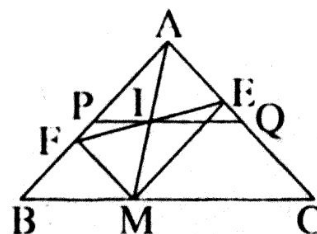


$$AQ = QP = PO = \frac{1}{3}OA.$$

Vậy, trọng tâm G di chuyển trên tia Pz.

Bài tập 5.

a. Tứ giác AEMF có các cặp cạnh đối song song (hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau) do đó nó là hình bình hành.



Khi đó, EF và AM cắt nhau tại trung điểm mỗi đường nên A, I, M thẳng hàng.

b. Qua I kẻ đường thẳng song song với BC, cắt các cạnh AB, AC theo thứ tự tại P, Q.

Trong ΔABM, ta có:

$$\begin{cases} AI = MI \\ PI \,//\, BM \end{cases} \Rightarrow AP = BP \text{ (P là trung điểm AB - cố định).}$$

Trong ΔACM, ta có:

$$\begin{cases} AI = MI \\ QI \,//\, CM \end{cases} \Rightarrow AQ = CQ \text{ (Q là trung điểm AC - cố định).}$$

Vậy, điểm I di chuyển trên đoạn thẳng PQ.

c. Ta có:

EF = AM, hai đường chéo của hình bình hành.

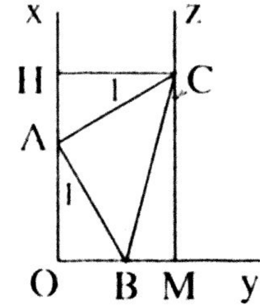
Do đó:

EF có độ dài nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ AM có độ dài nhỏ nhất

$\Leftrightarrow$ AM là đường vuông góc kẻ từ A đến BC.

Vậy, khi M là hình chiếu vuông góc của A lên BC thì EF có độ dài nhỏ nhất.

Bài tập 6. Hạ CH vuông góc với Ox.



Xét hai tam giác ΔOAB và ΔHCA, ta có:

AB = CA

$\hat{A}_1 = \hat{C}_1$, góc có cạnh tương ứng vuông góc

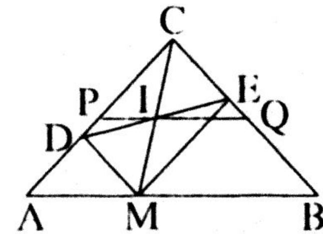
do đó:

ΔOAB = ΔHCA (cạnh huyền và góc nhọn)

⇒ CH = OA.

Vậy, khi B di chuyển trên tia Oy thì C thuộc tia Mz cách tia Ox một khoảng bằng OA.

Bài tập 7. Giả sử AD cắt BE tại C, khi đó ΔABC đều (do đó C cố định).



Tứ giác CDME có các cặp cạnh đối song song (cặp góc đồng vị bằng nhau) do đó nó là hình bình hành.

Suy ra, I là trung điểm của CM.

Qua I kẻ đường thẳng song song với AB, cắt các cạnh AC, BC theo thứ tự tại P, Q.

Trong ΔACM, ta có:

$$\begin{cases} CI = MI \\ PI \parallel AM \end{cases} \Rightarrow AP = CP \text{ (P là trung điểm AC - cố định).}$$

Trong ΔBCM, ta có:

$$\begin{cases} CI = MI \\ QI \parallel BM \end{cases} \Rightarrow BQ = CQ \text{ (Q là trung điểm BC - cố định).}$$

Vậy, điểm I di chuyển trên đoạn thẳng PQ.

CHỦ ĐỀ 12 HÌNH THOI

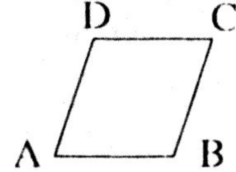
I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỊNH NGHĨA

Hình thoi là tứ giác có bốn cạnh bằng nhau.

Với hình thoi ABCD, ta có:

$$AB = BC = CD = DA$$



Nhận xét: Nếu ABCD là hình thoi thì nó cũng là hình bình hành.

2. CÁC TÍNH CHẤT

Hình thoi có tất cả các tính chất của hình bình hành.

Trong hình thoi, ta có các tính chất:

1. *Hai đường chéo vuông góc với nhau.*
2. *Hai đường chéo là các đường phân giác của các góc của hình thoi.*

Thí dụ sau sẽ minh hoạ cho việc sử dụng định nghĩa hình thoi cũng như tính chất về sự vuông góc của hai đường chéo để giải toán.

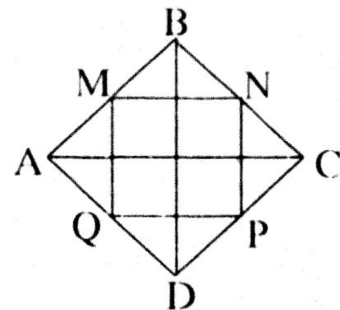
Thí dụ 1: Cho hình thoi ABCD. Gọi M, N, P, Q là trung điểm các cạnh của nó. Chứng minh rằng M, N, P, Q là bốn đỉnh của một hình chữ nhật.

Giải

Ta có ngay:

$$\begin{cases} MN \overset{//}{=} \dfrac{1}{2}AC \\ PQ \overset{//}{=} \dfrac{1}{2}AC \end{cases} \Rightarrow MN \overset{//}{=} PQ \Leftrightarrow MNPQ \text{ là hình bình hành.}$$

Tới đây, để chứng minh MNPQ là hình chữ nhật ta có thể lựa chọn một trong hai cách:



Cách 1: Ta có:

$$\begin{cases} MN \,//\, AC \\ MQ \,//\, BD \\ AC \perp BD \end{cases} \Rightarrow \widehat{NMQ} = 90^0.$$

Vậy, MNPQ là hình chữ nhật.

Cách 2: Ta có MP, NQ là đường trung bình của hình thoi ABCD nên:

$$MP = \frac{1}{2}(AD + BC) = AD \text{ và } NQ = \frac{1}{2}(AB + CD) = AB,$$

$$\Rightarrow MP = NQ.$$

Vậy, MNPQ là hình chữ nhật.

Chú ý: Có thể thay " hình thoi ABCD " bởi tứ giác có điều kiện gì mà vẫn được MNPQ là hình chữ nhật ?

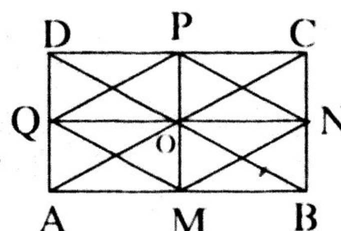
Thay " hình thoi " bởi " tứ giác có hai đường chéo vuông góc ".

3. CÁC DẤU HIỆU NHẬN BIẾT

1. *Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau là hình thoi.*
2. *Hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau là hình thoi.*
3. *Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình thoi.*
4. *Hình bình hành có một đường chéo là đường phân giác của một góc là hình thoi.*

Thí dụ 2: Chứng minh rằng trung điểm bốn cạnh của một hình chữ nhật là đỉnh của một hình thoi.

Giải



Ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Sử dụng dấu hiệu thứ nhất.

Với hình chữ nhật ABCD, ta có ngay AC = BD.

Sử dụng tính chất đường trung bình cho các tam giác ΔABC, ΔBCD, ΔCDA, ΔDAB, ta có:

$$MN = \frac{1}{2}AC,\ NP = \frac{1}{2}BD,\ PQ = \frac{1}{2}AC,\ QM = \frac{1}{2}BD$$

$$\Rightarrow MN = NP = PQ = QM \Leftrightarrow \text{MNPQ là hình thoi.}$$

Cách 2: Sử dụng dấu hiệu thứ hai.

Ta có ngay:

$$MN \overset{//}{=} PQ \Leftrightarrow \text{MNPQ là hình bình hành.}$$

Mặt khác, ta lại có:

$$MN = \frac{1}{2}AC,\ NP = \frac{1}{2}BD \Rightarrow MN = NP$$

Vậy, hình bình hành MNPQ có hai cạnh kề bằng nhau nên nó là hình thoi.

Cách 3: Sử dụng dấu hiệu thứ ba.

Ta có ngay:

$$MN \overset{//}{=} PQ \Leftrightarrow \text{MNPQ là hình bình hành.}$$

Mặt khác, ta lại có:

$$\begin{cases} MP \,//\, AD \\ NQ \,//\, AB \\ AB \perp AD \end{cases} \Rightarrow MP \perp NQ.$$

Vậy, hình bình hành MNPQ có hai đường chéo vuông góc với nhau nên nó là hình thoi.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho hình thoi ABCD. Kẻ hai đường cao AH, AK.

a. Chứng minh rằng AH = AK.

b. Biết $\hat{B} = 60^0$. Tam giác AHK là tam giác gì ? Vì sao ?

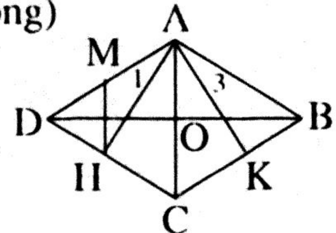
c. Biết hình thoi ABCD có chu vi bằng 16cm, AH = 2cm. Tính các góc của hình thoi.

Giải

a. Ta có ngay:

$\Delta AHD = \Delta AKB$ (cạnh huyền và một góc vuông)

$\Rightarrow AH = AK$.



b. Với giả thiết $\hat{B} = 60^0$, ta được:

$\hat{A}_1 = \hat{A}_3 = 30^0$,

$\hat{A} = 180^0 - 60^0 = 120^0$,

$H\hat{A}K = \hat{A} - \hat{A}_1 - \hat{A}_3 = 120^0 - 60^0 - 60^0 = 60^0$,

suy ra ΔAHK là tam giác đều.

c. Vì hình thoi ABCD có chu vi bằng 16cm nên:

$$AD = \frac{16}{4} = 4cm.$$

Gọi M là trung điểm của AD, ta có:

$$MH = \frac{1}{2}AD = 2cm = AM = AH \Rightarrow \Delta AHM \text{ đều}$$

$$\Rightarrow \hat{A}_1 = 60^0 \Rightarrow \hat{D} = \hat{B} = 30^0$$

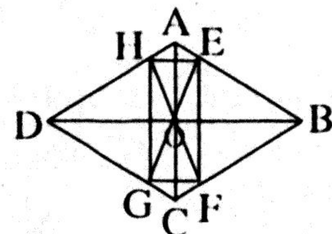
$$\Rightarrow \hat{A} = \hat{C} = 180^0 - 30^0 = 150^0.$$

Ví dụ 2: Cho hình thoi ABCD, O là giao điểm của hai đường chéo. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ O đến AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng EFGH là hình chữ nhật.

Giải

Nhận xét rằng:

$$\begin{cases} OE \perp AB \\ OG \perp CD \\ AB // CD \end{cases} \Rightarrow \text{E, O, G thẳng hàng.}$$



$$\begin{cases} OF \perp BC \\ OH \perp AD \\ BC // AD \end{cases} \Rightarrow \text{F, O, H thẳng hàng.}$$

Mặt khác, dựa trên tính chất đường phân giác của hình thoi, ta có:

- $O \in AC$ là tia phân giác của góc $\hat{A}$ và $\hat{C}$ $\Rightarrow OH = OE$ và $OF = OG$.
- $O \in BD$ là tia phân giác của góc $\hat{B}$ $\Rightarrow OE = OF$.

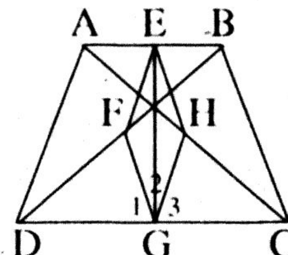
Vậy, tứ giác EFGH có hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên nó là hình chữ nhật.

Ví dụ 3: Cho hình thang cân ABCD có đáy CD. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của AB, BD, CD, CA.

a. Chứng minh rằng EG là tia phân giác của góc $\widehat{FEH}$.

b. Tính các góc của tứ giác EFGH biết hình thang cân ABCD có $\hat{C} = 60^0$.

Giải



a. Trong ΔABC ta có:

$$\begin{cases} BF = DF \\ CG = DG \end{cases} \Rightarrow FG \overset{//}{=} \frac{1}{2}BC.$$

Chứng minh tương tự, ta được:

$$EH \overset{//}{=} \frac{1}{2}BC,$$

$$EF \overset{//}{=} \frac{1}{2}AD, GH \overset{//}{=} \frac{1}{2}AD.$$

Mặt khác, từ giả thiết ta có AD = BC (cạnh bên hình thang cân) nên:

EH = FG = EF = HG $\Rightarrow$ EFGH là hình thoi

$\Rightarrow$ EG là tia phân giác của góc $\widehat{FEH}$.

b. Ta có:

$\hat{G}_1 = \hat{C} = 60^0$ (hai góc đồng vị),

$\hat{G}_2 = \hat{D} = \hat{C} = 60^0$,

$\hat{G}_3 = 180^0 - \hat{G}_1 - \hat{G}_2 = 60^0 = \hat{E}_3$,

$\widehat{EFG} = \widehat{EHG} = 180^0 - \hat{G}_3 = 120^0$.

Nhận xét: Kết quả ở câu a) vẫn đúng nếu thay " *hình thang cân ABCD có đáy CD* " bởi " *tứ giác ABCD có AD = BC (nhưng AD không song song với BC)* ".

Ví dụ 4: Cho một hình thoi không có góc nào vuông. Tìm điểm cách đều:

a. Tất cả các đỉnh của hình thoi.

b. Tất cả các cạnh của hình thoi.

Giải

Giả sử ABCD là hình thoi không có góc vuông, suy ra OA ≠ OB.

a. Gọi M là điểm cách đều bốn đỉnh của hình thoi, tức là:

MA = MB = MC = MD.

Khi đó:

- MA = MC

  $\Rightarrow$ M thuộc đường trung trực của AC $\Rightarrow$ M $\in$ BD.

- MB = MD

  $\Rightarrow$ M thuộc đường trung trực của BD $\Rightarrow$ M $\in$ AC.

Các đường thẳng BD và AC cắt nhau tại O

$\Rightarrow$ OA = OB mâu thuẫn.

Vậy không có điểm nào cách đều bốn đỉnh của hình thoi.

b. Gọi M là điểm cách đều bốn cạnh của hình thoi, ta có:

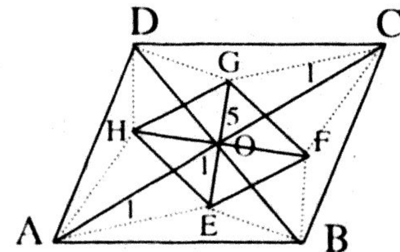
- M cách đều AB và BC nên M thuộc đường phân giác của góc B, khi đó M cũng cách đều DA và DC.
- M cách đều AB và AD nên M thuộc đường phân giác của góc A, khi đó M cũng cách đều CB và CD.

Các đường phân giác trên cắt nhau ở O, giao điểm hai đường chéo hình thoi. Điểm O cách đều bốn cạnh của hình thoi.

Vậy điểm phải tìm là điểm O.

Ví dụ 5: Cho hình bình hành ABCD, các đường chéo cắt nhau ở O. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là giao điểm của các đường phân giác của các tam giác ΔOAB, ΔOBC, ΔOCD, ΔOAD. Chứng minh rằng EFGH là hình thoi.

Giải



Nhận xét rằng:

- OH, OF là các tia phân giác của hai góc đối đỉnh nên chúng thẳng hàng.
- OE, OG là các tia phân giác của hai góc đối đỉnh nên chúng thẳng hàng.
- OH ⊥ OG, vì chúng là tia phân giác của hai góc kề bù. (1)

Xét hai tam giác ΔOAE và ΔOCG, ta có:

$\hat{O}_1 = \hat{O}_5$, vì đối đỉnh,

OA = OC,

$\hat{A}_1 = \frac{1}{2}O\hat{A}B = \frac{1}{2}OCD = C_1$,

do đó ΔOAE = ΔOCG (g.c.g) ⇒ OE = OG. (2)

Chứng minh tương tự, ta được OH = OF. (3)

Từ (2), (3) suy ra EFGH là hình bình hành và kết hợp với (1) ta được EFGH là hình thoi.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Phát biểu định nghĩa hình thoi.

Câu hỏi 2: Nêu các tính chất của đường chéo hình thoi. Chỉ rõ tính chất nào có ở hình bình hành, tính chất nào có riêng ở hình thoi.

Câu hỏi 3: Chỉ rõ trục đối xứng, tâm đối xứng của hình thoi.

Câu hỏi 4: Hình bình hành có thêm điều kiện gì thì trở thành hình thoi ?

Câu hỏi 5: Tứ giác ABCD có các yếu tố về độ dài như thế nào thì tứ giác là hình thoi ?

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Tính các góc của một hình thoi biết:

a. Cạnh của nó bằng một đường chéo.

b. Cạnh của nó gấp đôi đường cao.

Bài tập 2. Tứ giác ABD có toạ độ các đỉnh A(0, - 4), B(3, 0), C(0, 4), D(- 3, 0). Tứ giác ABCD là hình gì ? Tính chu vi của tứ giác đó.

Bài tập 3. Cho hình thang cân ABCD có đáy CD, $\hat{A} = 45^0$. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của AB, BD, CD, CA. Tính các góc của tứ giác EFGH.

Bài tập 4. Cho hình bình hành ABCD, hạ AH, AK theo thứ tự vuông góc với CD và BC, biết AH = AK.

a. Chứng minh rằng ABCD là hình thoi.

b. Biết $\bar{B} = 60^0$. Tam giác AHK là tam giác gì ? Vì sao ?

c. Biết ABCD có chu vi bằng 16cm, DH = 2cm. Tính các góc của hình thoi.

Bài tập 5. Cho ΔABC cân tại A. Gọi D, E, F theo tứ tự là trung điểm của AB, BC, AC. Chứng minh rằng DF là tia phân giác của góc $\widehat{ADE}$.

Bài tập 6. Hình bình hành ABCD có AD = 3cm, AB = 6cm. Gọi I là trung điểm của AB. Chứng minh rằng DI là tia phân giác của góc $\widehat{ADC}$.

Bài tập 7. Cho ΔABC. Lấy các điểm D, E theo thứ tự thuộc các cạnh AB, AC sao cho BD = CE. Gọi M, N, I, K theo tứ tự là trung điểm của BE, CD, DE, BC. Chứng minh rằng IK vuông góc với MN.

Bài tập 8. Hình thoi ABCD có $\hat{A} = 60^0$. Lấy hai điểm M, N theo thứ tự thuộc AD, CD sao cho AM = DN. Chứng minh rằng ΔBMN đều.

Bài tập 9. Chứng minh rằng trong hình thoi:

a. Giao điểm của hai đường chéo là tâm đối xứng của hình thoi.

b. Hai đường chéo là hai trục đối xứng của hình thoi.

Bài tập 10. Cho ΔABC, điểm M thuộc cạnh BC. Qua M dựng đường thẳng song song với AB cắt AC tại D, qua M dựng đường thẳng song song với AC cắt AB tại E.

a. Tứ giác ADME là hình gì ? Vì sao ?

b. Tìm vị trí của điểm M trên cạnh BC để tứ giác ADME là hình thoi.

c. Tìm điều kiện của ΔABC để tứ giác ADME là hình chữ nhật.

Bài tập 11. Dựng hình thoi ABCD, biết:

a. AB = 2cm, AC = 3cm.

b. AC = 4cm, BD = 6cm.

c. AB = 2cm, $\widehat{BAC} = 60^0$.

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. " *Cạnh của nó bằng một đường chéo* " nên nhận được một tam giác đều, từ đó suy ra hình thoi có 1 góc bằng 60^0.

b. " *Cạnh của nó gấp đôi đường cao* " nên nhận được một tam giác vuông có cạnh huyền gấp đôi cacnhj góc vuốn, từ đó suy ra hình thoi có 1 góc bằng 30^0.

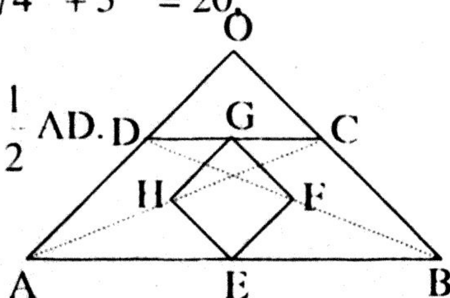
Bài tập 2. *Học sinh tự vẽ hình.*

Tứ giác ABCD là hình thoi bởi có hai đường chéo AC, BD vuông góc với nhau và cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đường.

Ta có:

$$CV_{ABCD} = 4AB = 4\sqrt{OA^2 + OB^2} = 4\sqrt{4^2 + 3^2} = 20.$$

Bài tập 3. Xét tứ giác EFGH, ta có:



$EF \overset{//}{=} GH$, vì cùng song song và bằng $\frac{1}{2}$ AD.

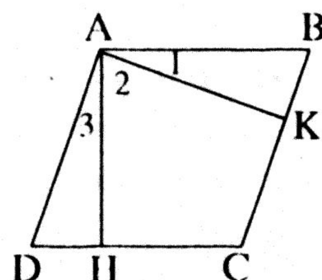
$GH = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC = GE.$

$\widehat{HGE} = \widehat{AOB} = 90^0$, góc có cạnh tương ứng song song .

Do đó, EFGH là hình vuông.

Vậy các góc của tứ giác EFGH bằng 90^0.

Bài tập 4.



a. Xét hai tam giác ΔAHD và ΔAKB, ta có:

AH = AK, giả thiết

$\hat{D} = \hat{B}$, vì ABCD là hình bình hành

do đó:

ΔAHD = ΔAKB (cạnh góc vuông và góc nhọn)

⇒ AD = AB ⇒ ABCD là hình thoi.

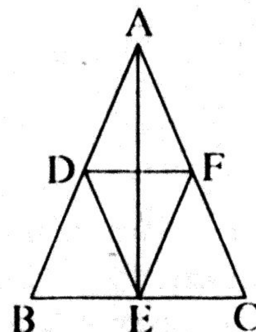
b. Xét ΔAHK, ta có:

AH = AK, theo kết quả câu a).

$\hat{A}_2 = \hat{A} - (\hat{A}_1 + \hat{A}_2) = \hat{A} - 2\hat{A}_1 = (180^0 - \hat{B}) - 2(90^0 - \hat{B}) = \hat{B} = 60^0.$

Vậy, ΔAHK đều.

Bài tập 5. Xét tứ giác ADEF, ta có:



$EF \overset{//}{=} \frac{1}{2}AB \overset{//}{=} AD.$

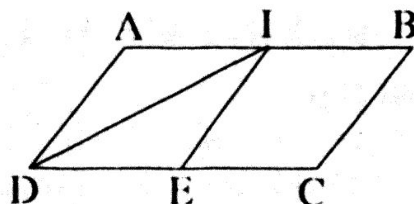
$AD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}AC = AF.$

Do đó:

ADEF là hình thoi ⇒ DF là tia phân giác của góc $\widehat{ADE}$.

Bài tập 6. Gọi E là trung điểm của CD.

Xét tứ giác ADEI, ta có:



$AI \overset{//}{=} DE.$

$AI = \frac{1}{2}AB = 3 = AD.$

Do đó:

ADEI là hình thoi ⇒ DI là tia phân giác của góc $\widehat{ADE}$.

Bài tập 7. *Học sinh tự vẽ hình.*

Xét tứ giác MKNI, ta có:

$$MI \overset{//}{=} \frac{1}{2}BD \overset{//}{=} KN.$$

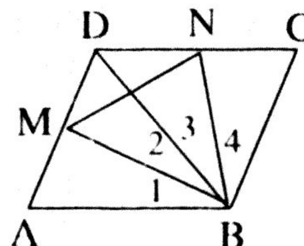
$$MI = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}CE = IN.$$

Do đó:

MKNI là hình thoi $\Rightarrow MN \perp IK$.

Bài tập 8. Hình thoi ABCD có $\hat{A} = 60^0$ suy ra ΔABD đều, do đó:

$AB = DB$.



Xét hai tam giác ΔABM và ΔDBN, ta có:

$AB = DB$

$\hat{A} = B\hat{D}N = 60^0$

AM = định nghĩa, giả thiết

do đó:

$\Delta ABM = \Delta DBN$ (c.g.c) $\Rightarrow BM = BN$ và $\hat{B}_1 = \hat{B}_3$.

Khi đó, ΔBMN có:

$BM = BN$

$M\hat{B}N = \hat{B}_2 + B_3 = \hat{B}_2 + B_1 = A\hat{B}D = 60^0$

do đó ΔBMN đều.

Bài tập 9.

a. Vì hình thoi là hình bình hành nên giao điểm của hai đường chéo là tâm đối xứng của hình thoi (tính chất của hình bình hành).

b. Hình thoi có hai đường chéo vuông góc với nhau tại trung điểm mỗi đường nên hai đường chéo là hai trục đối xứng của hình thoi.

Bài tập 10.

a. Thực hiện theo thứ tự:

- Dựng ΔABC biết độ dài ba cạnh AB = BC = 2cm và AC = 3cm.
- Gọi O là trung điểm AC, khi đó D là điểm đối xứng với B qua O.

b. Thực hiện theo thứ tự:

- Dựng AC = 4cm và lấy điểm O là trung điểm của AC.
- Dựng đường trung trực của AC, trên đó lấy hai điểm B, D sao cho OB = OD = 3cm.
- Nối A, B, C, D ta được hình thoi cần dựng.

c. Thực hiện theo thứ tự:

- Dựng ΔABC đều biết AB = 2cm.
- Gọi O là trung điểm AC, khi đó D là điểm đối xứng với B qua O.

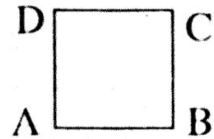
CHỦ ĐỀ 13 HÌNH VUÔNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỊNH NGHĨA

Hình vuông là tứ giác có bốn góc vuông và có bốn cạnh bằng nhau.

Với hình vuông ABCD, ta có:



$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^0,$$

$$AB = BC = CD = DA.$$

Nhận xét: Nếu ABCD là hình vuông thì nó vừa là hình chữ nhật, vừa là hình thoi.

2. CÁC TÍNH CHẤT

Hình vuông có tất cả các tính chất của hình chữ nhật và hình thoi, do đó ta có:

Trong hình vuông hai đường chéo bằng nhau, vuông góc với nhau và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

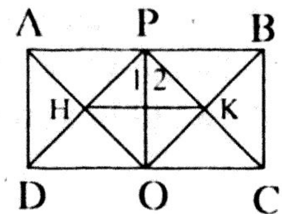
3. CÁC DẤU HIỆU NHẬN BIẾT

1. *Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau là hình vuông.*
2. *Hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình vuông.*
3. *Hình chữ nhật có một đường chéo là đường phân giác của một góc là hình vuông.*
4. *Hình thoi có một góc vuông là hình vuông*
5. *Hình thoi có hai đường chéo bằng nhau là hình vuông*

Nhận xét: Một tứ giác vừa là hình chữ nhật, vừa là hình thoi thì tứ giác đó là hình vuông.

Thí dụ 1: Cho hình chữ nhật ABCD có AB = 2AD. Gọi P, Q theo thứ tự là trung điểm của AB, CD. Gọi H là giao điểm của AQ và DP, gọi K là giao điểm của CP và BQ. Chứng minh rằng PHQK là hình vuông.

Giải



Ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Sử dụng dấu hiệu thứ nhất.

Nhận xét rằng APQD và BCQP là hình vuông, suy ra tứ giác PHQK có:

$$\hat{P} = 90^0,\ \hat{H} = 90^0,\ \hat{Q} = 90^0 \Rightarrow \text{PHQK là hình chữ nhật.}$$

Mặt khác, ta lại có:

$$HP = HQ.$$

Vậy, hình chữ nhật PHQK có hai cạnh kề bằng nhau nên nó là hình vuông.

Cách 2: Sử dụng dấu hiệu thứ hai.

Nhận xét rằng:

$AP \overset{//}{=} QC \Rightarrow$ APCQ là hình bình hành $\Rightarrow$ PK // HQ, (1)

$BP \overset{//}{=} QD \Rightarrow$ BPDQ là hình bình hành $\Rightarrow$ PH // KQ. (2)

Từ (1), (2) suy ra PHQK là hình bình hành.

Mặt khác, ta lại có:

$\widehat{PHQ} = 90^0 \Rightarrow$ PHQK là hình chữ nhật.

Trong ΔQAB có:

$$\begin{cases} QH = AH \\ QK = BK \end{cases} \Rightarrow HK \parallel AB \Rightarrow HK \perp AD \Rightarrow HK \perp PQ.$$

Vậy, hình chữ nhật PHQK có hai đường chéo vuông góc với nhau nên nó là hình vuông.

Cách 3: Sử dụng dấu hiệu thứ ba.

Nhận xét rằng APQD và BCQP là hình vuông, suy ra tứ giác PHQK có:

$\widehat{P} = 90^0$, $\widehat{H} = 90^0$, $\widehat{Q} = 90^0 \Rightarrow$ PHQK là hình chữ nhật.

Mặt khác, ta lại có:

$\widehat{P}_1 = \widehat{P}_2 = 45^0 \Rightarrow$ PQ là tia phân giác của góc $\widehat{HPK}$.

Vậy, hình chữ nhật PHQK có một đường chéo là đường phân giác của một góc nên nó là hình vuông.

Cách 4: Sử dụng dấu hiệu thứ tư.

Nhận xét rằng:

$AP \overset{//}{=} QC \Rightarrow$ APCQ là hình bình hành $\Rightarrow$ PK // HQ, (3)

$BP \overset{//}{=} QD \Rightarrow$ BPDQ là hình bình hành $\Rightarrow$ PH // KQ. (4)

Từ (3), (4) suy ra PHQK là hình bình hành.

Vì APQD là hình vuông bằng nhau, suy ra:

HP = HQ $\Rightarrow$ PHQK là hình thoi.

Mặt khác, ta lại có:

$\widehat{PHQ} = 90^0$.

Vậy, hình thoi PHQK có một góc vuông nên nó là hình vuông.

Cách 5: Sử dụng dấu hiệu thứ năm.

Nhận xét rằng APQD và BCQP là các hình vuông bằng nhau, suy ra:

PH = HQ = QK = KP

$\Rightarrow$ PHQK là hình thoi.

Trong ΔQAB có:

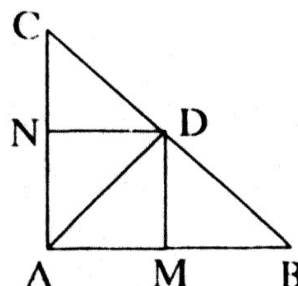
$$\begin{cases} QH = AH \\ QK = BK \end{cases} \Rightarrow HK = \frac{1}{2}AB = AD = PQ.$$

Vậy, hình thoi PHQK có hai đường chéo bằng nhau nên nó là hình vuông.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho ΔABC vuông tại A, đường phân giác AD. Gọi M, N theo thứ tự là chân đường vuông góc kẻ từ D đến AB, AC. Chứng minh rằng tứ giác AMDN là hình vuông.

Giải



Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Sử dụng dấu hiệu thứ nhất.

Nhận xét rằng, tứ giác AMDN có ba góc vuông nên nó là hình chữ nhật.

Vì AD là đường phân giác, suy ra:

$$DM = DN.$$

Vậy, hình chữ nhật AMDN có hai cạnh kề bằng nhau nên nó là hình vuông.

Cách 2: Sử dụng dấu hiệu thứ ba.

Nhận xét rằng:

- Tứ giác AMDN có ba góc vuông nên nó là hình chữ nhật.
- Vì AD là đường chéo đồng thời là đường phân giác của góc $\hat{A}$, nên AMDN là hình vuông.

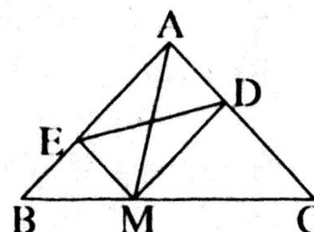
Ví dụ 2: Cho ΔABC, điểm M thuộc cạnh BC. Qua M dựng đường thẳng song song với AB cắt AC tại D, qua M dựng đường thẳng song song với AC cắt AB tại E.

a. Tứ giác ADME là hình gì ? Vì sao ?

b. Tìm vị trí của điểm M trên cạnh BC để tứ giác ADME là hình thoi.

c. Tìm điều kiện của ΔABC và vị trí của điểm M để tứ giác ADME là hình vuông.

Giải



a. Từ giả thiết, ta thấy tứ giác ADME có:

$$\begin{cases} AD \parallel ME \\ AE \parallel DM \end{cases} \Rightarrow \text{ADME là hình bình hành.}$$

b. Để hình bình hành ADME là hình thoi

$\Leftrightarrow$ AM là đường phân giác của góc $\hat{A}$

$\Leftrightarrow$ M là giao điểm của tia phân giác góc $\hat{A}$ với cạnh BC.

c. Để ADME là hình vuông

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{ADME là hinh chư nhật} \\ \text{ADME là hinh thoi} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} = 90^0 \\ \text{M thoả mãn b)} \end{cases}.$$

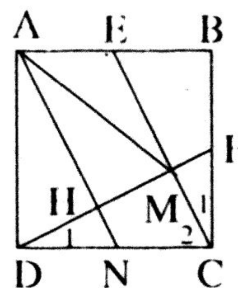
Vậy, với ΔABC vuông tại A và M là giao điểm của tia phân giác góc $\hat{A}$ với cạnh BC thì tứ giác ADME là hình vuông.

Ví dụ 3: Cho hình vuông ABCD. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, BC.

a. Chứng minh rằng $CE \perp DF$.

b. Gọi M là giao điểm của CE và DF. Chứng minh rằng AM = AB.

Giải



a. Ta có:

$\Delta CBE = \Delta DCF$ (c.g.c) $\Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{D}_1$.

Mặt khác, ta lại có:

$\hat{D}_1 + \hat{F}_1 = 90^0 \Rightarrow \hat{C}_1 + \hat{E}_1 = 90^0 \Rightarrow CE \perp DF$.

b. Gọi N là trung điểm của DC.

Tứ giác AECN có:

$AE \overset{//}{=} NC \Rightarrow$ AECN là hình bình hành

$\Rightarrow AN // EC \overset{a)}{\Rightarrow} AN \perp DF$. (1)

Trong ΔDMC ta có:

$\begin{cases} DN = CN \\ NH // CM \end{cases} \Rightarrow DH = HM$. (2)

Từ (1), (2) suy ra ΔADM cân do đó:

$AM = AD \Rightarrow AM = AB$.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Phát biểu định nghĩa hình vuông từ hình chữ nhật, định nghĩa hình vuông từ hình thoi.

Câu hỏi 2: Đường chéo hình vuông có các tính chất gì ? Nêu các tính chất có ở hình bình hành, ở hình chữ nhật, ở hình thoi.

Câu hỏi 3: Hình vuông có mấy trục đối xứng?

Câu hỏi 4: Phát biểu các dấu hiệu nhận biết hình vuông từ hình chữ nhật.

Câu hỏi 5: Phát biểu các dấu hiệu nhận biết hình vuông từ hình thoi.

Câu hỏi 6: Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau và hai đường chéo vuông góc có là hình vuông không ? Hãy sửa lại một điều kiện để tứ giác là hình vuông.

Câu hỏi 7: Gọi T là tập hợp các hình thoi. Gọi B, C, V theo thứ tự là tập hợp các hình bình hành, hình chữ nhật, hình vuông. Dùng kí hiệu $\subset$ để thể hiện quan hệ giữa tập hợp T với các tập hợp B, C, V.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho hình thang vuông ABCD có $\hat{A} = \hat{D} = 90^0$ AB = 3cm, AD = 8cm, CD = 5cm. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của BC, AD. Gọi K là hình chiếu của M trên CD. Chứng minh rằng MNDK là hình vuông.

Bài tập 2. Cho hình vuông ABCD. Gọi E là một điểm nằm trên cạnh BC. Tia phân giác của góc $D\hat{A}E$ cắt CD tại F. Kẻ FH vuông góc với AE và FH cắt BC tại G. Tính số đo góc $F\hat{A}G$.

Bài tập 3. Cho hình vuông ABCD. Lấy các điểm E, F theo thứ tự thuộc các cạnh CD, DA sao cho AF = DE. Chứng minh rằng AE = BF và $AE \perp BF$.

Bài tập 4. Cho hình vuông ABCD. Vẽ điểm E trong hình vuông sao cho $\widehat{EDC} = \widehat{ECD} = 15^0$, vẽ điểm F trong hình vuông sao cho $\widehat{FDA} = F\hat{A}D = 15^0$. Chứng minh rằng:

a. ΔDEF là tam giác đều.

b. ΔABE là tam giác đều.

Bài tập 5. Cho hình vuông ABCD. Lấy các điểm M, N, P, Q theo thứ tự thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA sao cho AM = BN = CP = DQ. Tứ giác MNPQ là hình gì ? Vì sao ?

Bài tập 6. Cho hình vuông ABCD, điểm E thuộc cạnh CD. Tia phân giác của góc $\widehat{ABE}$ cắt AD tại K. Chứng minh rằng BE = AK + CE.

Bài tập 7. Cho ΔABC vuông cân tại A. Lấy các điểm H, G trên BC sao cho BH = HG = GC. Qua H và G kẻ các đường vuông góc với BC, chúng cắt AB, AC theo thứ tự tại E, F. Tứ giác EFGH là hình gì ? Vì sao ?

Bài tập 8. Cho ΔABC vuông tại A, điểm M thuộc cạnh huyền BC. Gọi H là hình chiếu của M trên AB, K là hình chiếu của M trên AC.

a. Chứng minh rằng AM = HK.

b. Điểm M ở vị trí nào trên BC thì $AM \perp HK$?

c. Điểm M ở vị trí nào trên BC thì HK có độ dài nhỏ nhất ?

Bài tập 9. Cho hình chữ nhật có hai cạnh kề không bằng nhau. Chứng minh rằng các tia phân giác của các góc của hình chữ nhật đó cắt nhau tạo thành một hình vuông.

Bài tập 10. Cho hình chữ nhật ABCD có AD = 3cm, AB = 6cm . Gọi I, K theo thứ tự là trung điểm của AB, CD. Gọi M là giao điểm của AK và DI, gọi N là giao điểm của BK và CI. Chứng minh rằng $IK \perp MN$, IK = MN.

Bài tập 11. Cho đoạn thẳng AB, điểm C nằm giữa A và B. Vẽ về một phía của AB các hình vuông ACDE, BCHF.

a. Chứng minh rằng AH = BD, $AH \perp BD$

b. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, DH . Gọi I, K theo thứ tự là tâm đối xứng của các hình vuông ACDE, BCHF. Tứ giác IMKN là hình gì ? Vì sao ?

Bài tập 12. Dựng hình vuông biết hiệu của đường chéo và một cạnh của nó bằng 2cm.

Bài tập 13. Một mảnh vườn hình vuông được rào xung quanh. Sau một thời gian, bờ rào bị hỏng, chỉ còn lại hai cọc rào ở hai cạnh đối diện. Nếu biết được tâm của mảnh vườn, hỏi có thể xác định các cạnh của mảnh vườn đó hay không ?

Bài tập 14. Cho ΔABC. Vẽ ở ngoài tam giác các hình vuông ABDE, ACFH.

a. Chứng minh rằng $EC = BH$ và $EC \perp BH$.

b. Gọi I là trung điểm của BC. Gọi M, N theo thứ tự là tâm của các hình vuông ABDE, ACFH. Hãy xác định dạng của ΔIMN.

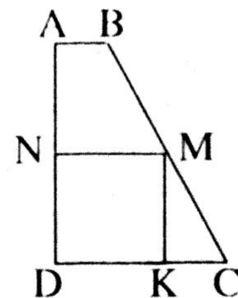
Bài tập 15. Cho ΔABC nhọn, biết $\hat{A} = 45^0$, đường cao AH. Gọi D là điểm đối xứng với H qua AB, gọi E là điểm đối xứng với H qua AC. Gọi K là giao điểm của DB và EC.

a. Chứng minh rằng ADKE là hình vuông.

b. ΔABC có điều kiện gì để ba điểm A, H, K thẳng hàng ?

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1. Ta thấy ngay MNDK là hình chữ nhật.



Mặt khác, dựa trên tính chất đường trung bình ta có:

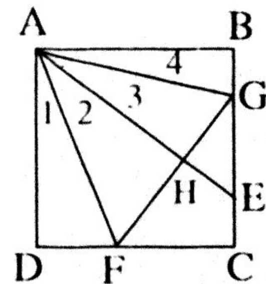
$$MN = \frac{1}{2}(AB + CD) = \frac{1}{2}(3 + 5) = 4cm$$

$$DN = \frac{1}{2}AD = 4cm$$

suy ra $MN = DN$.

Vậy, MNDK là hình vuông.

Bài tập 2.



Xét hai tam giác vuông ΔADF và ΔAHF, ta có:

AF chung

$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, tính chất đường phân giác

do đó:

$\Delta ADF = \Delta AHF$ (cạnh huyền và góc nhọn) $\Rightarrow AD = AH$.

Xét hai tam giác vuông ΔAHG và ΔABG, ta có:

AG chung và $AH = AD = AB$

do đó:

$\Delta AHG = \Delta ABG$ (cạnh huyền và cạnh góc vuông) $\Rightarrow \hat{A}_3 = \hat{A}_4$.

Khi đó $F\hat{A}G = \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = \frac{1}{2}\hat{A} = 45^0$.

Bài tập 3. *Học sinh tự vẽ hình.*

- Chứng minh $AE = BF$ dựa trên $\Delta ADE = \Delta BAF$.
- Chứng minh $AE \perp BF$ do $A\hat{B}F + B\hat{A}E = 90^0$.

Bài tập 4. Sử dụng tính chất tam giác cân có một góc bằng 60^0.

Bài tập 5. (*Học sinh tự vẽ hình*): Nhận xét rằng:

$\Delta AMQ = \Delta BNM = \Delta CPN = \Delta DQP$ (hai cạnh góc vuông bằng nhau)

do đó $MN = NP = PQ = QM \Leftrightarrow$ MNPQ là hình thoi.

Mặt khác, do $B\hat{N}M + C\hat{N}P = 90^0 \Rightarrow M\hat{N}P = 90^0$.

Vậy, MNPQ là hình vuông.

ÔN TẬP CHƯƠNG I

Bài tập 1. Cho hình tứ giác ABCD. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA. Tìm điều kiện của tứ giác ABCD để EFGH là:

a. Hình vuông.

b. Hình chữ nhật.

c. Hình thoi.

Bài tập 2. Cho tam giác ABC vuông tại A, điểm D là trung điểm BC. Gọi M là điểm đối xứng với D qua AB và E là giao điểm của AB và AM. Gọi N là điểm đối xứng với D qua AC và F là giao điểm của AC và DN.

a. Tứ giác ABCD là hình gì ? Chứng minh.

b. Tứ giác ADBM là hình gì ? Chứng minh.

c. Tứ giác ADCN là hình gì ? Chứng minh.

d. Chứng minh rằng M đối xứng với N qua A.

e. Tam giác ABC có điều kiện gì sthì tứ giác AEDF là hình vuông ?

Bài tập 3. Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi D là điểm đối xứng với H qua AB, E là điểm đối xứng với H qua AC.

a. Chứng minh rằng D đối xứng với E qua A.

b. ADHE là hình gì ? Chứng minh.

c. Chứng minh rằng BC = BD + CE.

Bài tập 4. Cho tứ giác ABCD. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của AB, AC, DC, BD. Tìm điều kiện để tứ giác ABCD để tứ giác EFGH là:

a. Hình chữ nhật.

b. Hình vuông.

c. Hình thoi.

Bài tập 5. Cho ΔABC, các đường trung tuyến BD và CE cắt nhau tại G. Gọi H là trung điểm của GB. K là trung điểm GC.

a. Chứng minh rằng tứ giác DEHK là hình bình hành.

b. ΔABC có điều kiện gì để tứ giác DEHK là hình chữ nhật ?

c. Nếu các đường trung tuyến DB và CE vuông góc với nhau thì tứ giác DEHK là hình gì ?

Bài tập 6. G là trọng tâm ΔABC. Đường thẳng d cắt cạnh AB và AC. Chứng minh khoảng cách từ A đến đường thẳng d bằng tổng các khoảng cách từ B và C đến đường thẳng này.

Bài tập 7. Tìm điều kiện của ΔABC sao cho tổng khoảng cách từ một điểm M bất kì trên cạnh BC đến hai cạnh còn lại không phụ thuộc vào vị trí của nó.

Bài tập 8. Cho hình bình hành ABCD có AB = 2AD. Gọi E và F theo thứ tự là trung điểm của AB và CD.

a. Các tứ giác AEHD và AECF là hình gì ? Chứng minh.

b. Gọi M là giao điểm của AF và DE, N là giao điểm của BF và CE. Chứng minh rằng tứ giác EMFN là hình chữ nhật.

c. Hình bình hành ABCD có điều kiện gì thì EMFN là hình vuông.

Bài tập 9. Cho hình bình hành ABCD có E và F là trung điểm của AB và CD.

a. Tứ giác DEBF là hình gì ?

b. Chứng minh rằng các đường thẳng AC, BD, EF cùng cắt nhau tại một điểm.

c. Gọi giao điểm của AC với DE và BF theo thứ tự là M và N. Chứng minh rằng tứ giác EMFN là hình bình hành.

Bài tập 10. Cho hình vuông ABCD qua A kẻ hai đường thẳng vuông góc với nhau, cắt BC tại P và R, cắt CD tại Q và S.

a. Chứng minh ΔAQR và ΔAPS là các tam giác cân.

b. QR cắt PS tại H và M, N là trung điểm QR và PS. Chứng minh tứ giác AHMN là hình chữ nhật.

c. Chứng minh M, N cách đều A và C.

d. Chứng minh 4 điểm M, B, N, D thẳng hàng.

Bài tập 11. Cho đoạn thẳng AB = a. Gọi M là một điểm nằm giữa A và B. Vẽ về một phía của AB các hình vuông AMNP, AMLK có tâm theo thứ tự là C và D. Gọi I là trung điểm của CD.

a. Tính khoảng cách từ I đến AB.

b. Khi điểm M di chuyển trên đoạn thẳng AB thì điểm I di chuyển trên đường nào ?

CHƯƠNG II - ĐA GIÁC
DIỆN TÍCH ĐA GIÁC

Trong chương này, chúng ta sẽ thu nhận được khái niệm về đa giác cùng các công thức tính diện tích của nó, cụ thể:

1. **Đa giác - Đa giác đều**
2. **Diện tích đa giác**

CHỦ ĐỀ 1 ĐA GIÁC – ĐA GIÁC ĐỀU

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. KHÁI NIỆM ĐA GIÁC

Định nghĩa đa giác lồi: *Đa giác lồi là đa giác luôn nằm trong một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng chứa bất kì cạnh nào của đa giác đó.*

Chú ý:
1. Từ nay, khi nói đến đa giác mà không chú thích gì thêm, ta hiểu đó là đa giác lồi.
2. Đa giác có n đỉnh được gọi là n - giác hay hình n cạnh.

Thí dụ 1:

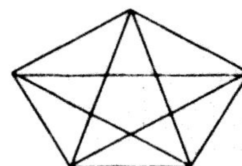
a. Vẽ hình và tính số đường chéo của ngũ giác, lục giác.

b. Chứng minh rằng hình n - giác có tất cả $\frac{n(n-3)}{2}$ đường chéo.

Giải

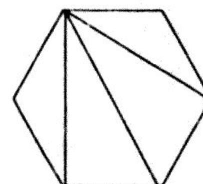
a. Nhận xét rằng:

- *Với ngũ giác*, ta có:
  - Từ mỗi đỉnh vẽ được hai đường chéo. Ngũ giác có 5 đỉnh nên vẽ được 5.2 = 10 đường chéo, tuy nhiên trong đó mỗi đường chéo được tính hai lần.



  Vậy, ngũ giác có tất cả 5 đường chéo.

- *Với lục giác*, ta có:
  - Từ mỗi đỉnh vẽ được ba đường chéo. Lục giác có 6 đỉnh nên vẽ được 6.3 = 18 đường chéo, tuy nhiên trong đó mỗi đường chéo được tính hai lần.



  Vậy, lục giác có tất cả 9 đường chéo.

b. Đối với hình n - giác $A_1A_2...A_n$, ta có nhận xét:

- Từ đỉnh A_1 vẽ được n - 1 đoạn thẳng nối đỉnh A_1 với các đỉnh còn lại của đa giác, trong đó có 2 đoạn thẳng (A_1A_2 và A_1A_n) trùng với hai cạnh của đa giác. Do đó, qua mỗi đỉnh của n - giác vẽ được n - 3 đường chéo.
- Với n đỉnh, có n.(n - 3) đường chéo, trong đó mỗi đường chéo đã được tính hai lần.

Vậy, n - giác có tất cả $\frac{n(n-3)}{2}$ đường chéo.

Chú ý: Qua thí dụ trên chúng ta ghi nhận được một kết quả:

> *Hình n – giác có tất cả* $\frac{n(n-3)}{2}$ *đường chéo.*

Câu hỏi 3: Tứ giác có bốn góc bằng nhau có là tứ giác đều không

Câu hỏi 4: Tứ giác đều là hình nào ?

Câu hỏi 5: Cho đa giác đều n cạnh. Viết công thức tính số đo mỗi góc của đa giác đều. Hãy tính nhẩm số đo mỗi góc của lục giác đều.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Tính số đường chéo và số đo góc của hình 10 cạnh đều, 12 cạnh đều.

Bài tập 2. Tính tổng số đo các góc của đa giác 10 cạnh.

Bài tập 3. Tính số cạnh của một đa giác đều, biết tổng số đo tất cả các góc ngoài và một góc trong của nó bằng 468^0.

Bài tập 4. Tính số cạnh của một đa giác biết tổng số đo các góc trong của nó bằng:

a. 180^0. b. 360^0. c. 720^0.

Bài tập 5. Tìm đa giác có tổng số đo các góc trong bằng nửa tổng số đo các góc ngoài.

Bài tập 6. Cho ngũ giác đều ABCDE. Gọi A' là điểm đối xứng với A qua B, B' là điểm đối xứng với B qua C, C' là điểm đối xứng với C qua D, D' là điểm đối xứng với D qua E, E' là điểm đối xứng với E qua A. Chứng minh rằng A'B'C'D'E' là ngũ giác đều.

Bài tập 7. Cho lục giác đều ABCDEF. Gọi M là trung điểm của EF, N là trung điểm của BD. Chứng minh rằng AMN là tam giác đều.

Bài tập 8. Tìm đa giác có tất cả các góc đều nhọn.

Bài tập 9.

a. Một n - giác có nhiều nhất bao nhiêu góc nhọn ?

b. Một n - giác có ít nhất bao nhiêu góc nhọn ?

c. Một n - giác có nhiều nhất bao nhiêu góc tù ?

d. Một n - giác có ít nhất bao nhiêu góc tù ?

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. Với hình có 10 cạnh bằng nhau (n = 10) thì:

- Số đường chéo bằng $\frac{10(10-3)}{2} = 35$ đường.
- Số đo mỗi góc bằng $\frac{(10-2).180^0}{10} = 144^0$.

b. Với hình có 12 cạnh bằng nhau (n = 12) thì:

- Số đường chéo bằng $\frac{12(12-3)}{2} = 54$ đường.
- Số đo mỗi góc bằng $\frac{(12-2).180^0}{12} = 150^0$.

Bài tập 2. Tổng số đo các góc của đa giác 10 cạnh bằng:

$(10 - 2).180^0 = 440^0$.

Bài tập 3. Giả sử đa giác có n cạnh (tức có n đỉnh), khi đó:

- Tổng số đo các góc ngoài của nó bằng 360^0.
- Mỗi góc trong có số đo bằng $\frac{(n-2).180^0}{n}$.

Theo giả thiết ta cần có điều kiện:

$$360^0 + \frac{(n-2).180^0}{n} = 468^0 \Leftrightarrow n = 5.$$

Vậy, đa giác cần tìm là ngũ giác đều.

Bài tập 4.

a. Tam giác. b. Tứ giác. c. Lục giác.

Bài tập 5. Giả sử đa giác có n đỉnh, khi đó:

- Tổng số đo các góc trong của nó bằng $(n - 2).180^0$.
- Tổng số đo các góc ngoài của nó bằng 360^0.

Theo giả thiết ta cần có điều kiện:

$$(n - 2).180^0 = \frac{1}{2}.360^0 \Leftrightarrow n = 3.$$

Vậy, đa giác cần tìm là tam giác.

Bài tập 6. *Học sinh tự vẽ hình.*

Nhận xét rằng:

$\Delta A'BB' = \Delta B'CC' = \Delta C'DD' = \Delta D'EE' = \Delta E'AA'$ (c.g.c)

$\Rightarrow A'B' = B'C' = C'D' = D'E' = E'A'$

$\Leftrightarrow$ A'B'C'D'E' là ngũ giác đều.

Bài tập 7. Gọi A', C' theo thứ tự là trung điểm của AB và CD.

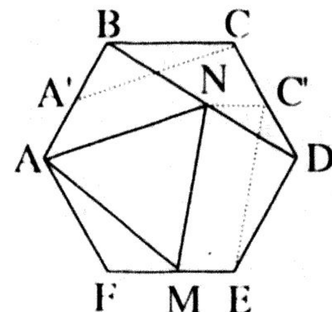
Nhận xét rằng:

- AA'CN là hình bình hành, suy ra:

  AN = A'C.

- MNC'E là hình bình hành, suy ra:

  MN = EC'.



Ta có:

$\Delta A'BC = \Delta C'DE = \Delta MFA$ (c.g.c)

$\Rightarrow A'C = C'E = MA \Leftrightarrow AN = NM = MA$

$\Leftrightarrow$ AMN là tam giác đều.

Bài tập 8. Xét đa giác $A_1A_2...A_n$ có tất cả các góc đều nhọn ($2 < n \in \mathbf{N}$)

Ta có:

$0 < \hat{A}_1, \hat{A}_2, ..., \hat{A}_n < 90^0$.

$(n - 2).180^0 = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + ... + \hat{A}_n < 90^0 + 90^0 + ... + 90^0 = n.90^0$

$\Leftrightarrow 2(n - 2) < n \Leftrightarrow n < 4 \Rightarrow n = 3.$

Vậy, chỉ có tam giác mới có được các góc đều nhọn.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Diện tích hình chữ nhật thay đổi như thế nào nếu:

a. Chiều dài tăng 2 lần, chiều rộng giảm 4 lần.

b. Mỗi cạnh tăng 10%.

Giải

Ta có diện tích hình chữ nhật được cho bởi:

S = a.b, với a là chiều dài và b là chiều rộng.

a. Với giả thiết " *Chiều dài tăng 2 lần, chiều rộng giảm 4 lần* ", ta được:

$$a' = 2a \text{ và } b' = \frac{1}{4}b.$$

Khi đó, ta nhận được diện tích mới S' là:

$$S' = a'.b' = 2a.\frac{1}{4}b = \frac{1}{2}a.b = \frac{1}{2}S.$$

Vậy, diện tích giảm 2 lần.

b. Với giả thiết " *Mỗi cạnh tăng 10%* ", ta được:

$$a' = \frac{110}{100}a \text{ và } b' = \frac{110}{100}b.$$

Khi đó, ta nhận được diện tích mới S' là:

$$S' = a'.b' = \frac{110}{100}a.\frac{110}{100}b = \frac{121}{100}a.b = \frac{121}{100}S.$$

Vậy, diện tích tăng 21%.

Ví dụ 2: Tính các cạnh của hình chữ nhật biết:

a. Diện tích của nó bằng $8cm^2$ và tỉ số các cạnh bằng $\frac{1}{2}$.

b. Diện tích của nó bằng $3cm^2$ và chu vi của nó bằng 8cm.

Giải

Gọi a, b là độ dài các cạnh của hình chữ nhật, với a, b > 0.

a. Từ giả thiết " *Diện tích của nó bằng $8cm^2$ và tỉ số các cạnh bằng $\frac{1}{2}$* ", ta được:

$$\begin{cases} ab = 8 \\ \dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a \\ a.2a = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4cm \\ a = 2cm \end{cases}.$$

Vậy, hình chữ nhật có độ dài hai cạnh là 2cm và 4cm.

b. Từ giả thiết " *Diện tích của nó bằng $3cm^2$ và chu vi của nó bằng 8cm* ", ta được:

$$\begin{cases} ab = 3 \\ 2(a+b) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 3 \\ a + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 - a \\ a(4-a) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3cm \\ a = 1cm \end{cases}.$$

Vậy, hình chữ nhật có độ dài hai cạnh là 1cm và 3cm.

Ví dụ 3: Cho tam giác vuông cân, biết độ dài cạnh huyền bằng l. Tính diện tích tam giác đó.

Giải

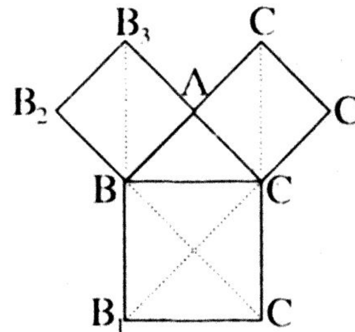
Gọi a là cạnh của tam giác vuông cân, theo định lí Pitago ta có:

$$l^2 = x^2 + x^2 = 2x^2 \Leftrightarrow x = \frac{l}{\sqrt{2}}.$$

Suy ra, diện tích tam giác được cho bởi:

$$S = \frac{1}{2}x.x = \frac{1}{2}.\frac{l}{\sqrt{2}}.\frac{l}{\sqrt{2}} = \frac{l^2}{4}.$$

Ví dụ 4: Cho một tam giác vuông cân. Chứng minh rằng tổng diện tích của hai hình vuông dựng trên hai cạnh góc vuông bằng diện tích của hình vuông dựng trên cạnh huyền.



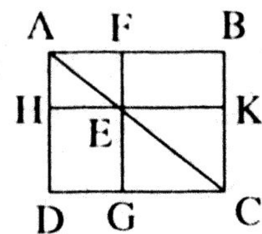
Giải

Chia các hình vuông như trên hình vẽ, ta được các tam giác vuông cân bằng nhau và bằng ΔABC, từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Chú ý: Kết quả trên vẫn đúng trong trường hợp thay tam giác vuông cân bằng tam giác vuông - *Đề nghị bạn đọc tự chứng minh.*

Ví dụ 5: Cho hình chữ nhật ABCD, lấy điểm E bất kì trên AC, kẻ Ex // BC cắt AB, CD theo thứ tự lại F, G kẻ Ey // AB cắt AD, BC theo thứ tự lại H, K. Chứng minh rằng hai hình chữ nhật EFBK và EGDH có cùng diện tích.

Giải



Từ giả thiết, ta có ngay:

$\Delta ACB = \Delta ACD \Rightarrow S_{\Delta ACB} = S_{\Delta ACD}$.

$\Delta AEF = \Delta AEH \Rightarrow S_{\Delta AEF} = S_{\Delta AEH}$.

$\Delta ECK = \Delta ECG \Rightarrow S_{\Delta ECK} = S_{\Delta ECG}$.

Khi đó:

$$S_{EFBK} = S_{\Delta ACB} - S_{\Delta AEF} - S_{\Delta ECK} = S_{\Delta ACD} - S_{\Delta AEH} - S_{\Delta ECG} = S_{EGDH}.$$

Ví dụ 6: Cho hình chữ nhật có độ dài đường chéo bằng l. Tìm giá trị lớn nhất của dện tích hình chữ nhật.

Giải

Hạ AH vuông góc với BD, trước tiên ta có nhận xét:

$AH \le AO = \frac{l}{2}$ (cạnh góc vuông nhỏ hơn cạnh huyền)

Khi đó, ta nhận được diện tích mới S' là:

$$S' = a'.b' = 3a.\frac{1}{6}b = \frac{1}{2}a.b = \frac{1}{2}S.$$

Vậy, diện tích giảm 2 lần.

d. Với giả thiết "*Chiều dài giảm 4 lần, chiều rộng giảm 2 lần*", ta được:

$$a' = \frac{1}{4}a \text{ và } b' = \frac{1}{2}b.$$

Khi đó, ta nhận được diện tích mới S' là:

$$S' = a'.b' = \frac{1}{4}a.\frac{1}{2}b = \frac{1}{8}a.b = \frac{1}{8}S.$$

Vậy, diện tích giảm 8 lần.

e. Với giả thiết "*Mỗi cạnh tăng 20%*", ta được:

$$a' = \frac{120}{100}a \text{ và } b' = \frac{120}{100}b.$$

Khi đó, ta nhận được diện tích mới S' là:

$$S' = a'.b' = \frac{120}{100}a.\frac{120}{100}b = \frac{144}{100}a.b = \frac{144}{100}S.$$

Vậy, diện tích tăng 44%.

f. Với giả thiết "*Mỗi cạnh giảm 10%*", ta được:

$$a' = \frac{90}{100}a \text{ và } b' = \frac{90}{100}b.$$

Khi đó, ta nhận được diện tích mới S' là:

$$S' = a'.b' = \frac{90}{100}a.\frac{90}{100}b = \frac{81}{100}a.b = \frac{81}{100}S.$$

Vậy, diện tích giảm 19%.

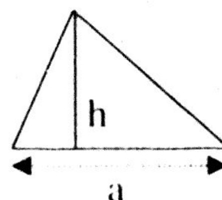
Bài toán **2**

DIỆN TÍCH TAM GIÁC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Ta có kết quả:

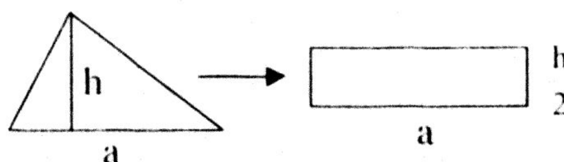
> *Diện tích tam giác bằng nửa tích của một cạnh với chiều cao tương ứng với cạnh đó*
>
> $$S = \frac{1}{2}a.h.$$



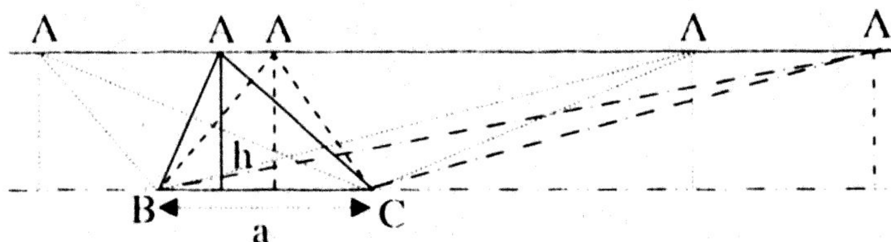
Nhận xét: 1. Ta thấy ngay rằng:

$$S = \frac{1}{2}a.h.$$

cũng chính bằng diện tích của hình chữ nhật có hai cạnh là $\frac{1}{2}$ a và h - *Điều này gợi ý cho việc có thể cắt một tam giác thành ba mảnh để ghép lại thành một hình chữ nhật.*



2. Dựa vào công thức tính diện tích tam giác, chúng ta giải thích được tại sao các tam giác trong hình sau có diện tích bằng nhau:



Vậy, ta thực hiện được yêu cầu " *Cho ΔABC có đáy BC cố định, đỉnh A di động trên một đường thẳng d cố định song song với BC. Chứng minh rằng ΔABC luôn có diện tích không đổi* ".

Ví dụ 2: Cho ΔABC nhọn với ba đường cao AA', BB', CC'. Gọi H là trực tâm của ΔABC. Chứng minh rằng:

a. $\dfrac{HA_1}{AA_1}+\dfrac{HB_1}{BB_1}+\dfrac{HC_1}{CC_1}=1$.

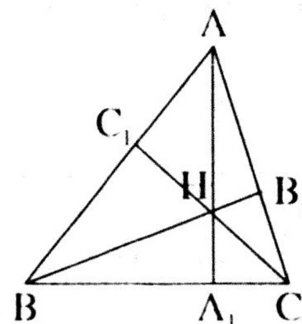
b. $\dfrac{AH}{A_1H}+\dfrac{BH}{B_1H}+\dfrac{CH}{C_1H}\geq 6$, khi nào dấu " = " xảy ra.

Giải

Gọi diện tích ΔABC là S.

a. Các tam giác ΔHBC và ΔABC có chung đáy BC nên tỉ số hai đường cao bằng tỉ số hai diện tích:

$$\frac{HA_1}{AA_1}=\frac{S_{HBC}}{S}.$$



Tương tự, ta có:

$$\frac{HB_1}{BB_1}=\frac{S_{HAC}}{S},\quad \frac{HC_1}{CC_1}=\frac{S_{HAB}}{S}.$$

Do đó:

$$\frac{HA_1}{AA_1}+\frac{HB_1}{BB_1}+\frac{HC_1}{CC_1}=\frac{S_{HBC}+S_{HAC}+S_{HAB}}{S}=\frac{S}{S}=1.$$

b. Biến đổi VT của bất đẳng thức về dạng:

$$VT=\frac{AA_1-A_1H}{A_1H}+\frac{BB_1-B_1H}{B_1H}+\frac{CC_1-C_1H}{C_1H}$$

$$=\frac{AA_1}{A_1H}+\frac{BB_1}{B_1H}+\frac{CC_1}{C_1H}-3=\frac{\frac{1}{2}a.AA_1}{\frac{1}{2}a.A_1H}+\frac{\frac{1}{2}b.BB_1}{\frac{1}{2}b.B_1H}+\frac{\frac{1}{2}c.CC_1}{\frac{1}{2}c.C_1H}-3$$

$$=\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta HBC}}+\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta HCA}}+\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta HAB}}-3$$

$$=\frac{S_{\Delta HAB}+S_{\Delta HBC}+S_{\Delta HCA}}{S_{\Delta HBC}}+\frac{S_{\Delta HAB}+S_{\Delta HBC}+S_{\Delta HCA}}{S_{\Delta HCA}}+$$

$$+\frac{S_{\Delta HAB}+S_{\Delta HBC}+S_{\Delta HCA}}{S_{\Delta HAB}}-3$$

$$= \left(\frac{S_{\Delta HAB}}{S_{\Delta HBC}} + 1 + \frac{S_{\Delta HCA}}{S_{\Delta HBC}}\right) + \left(\frac{S_{\Delta HAB}}{S_{\Delta HCA}} + \frac{S_{\Delta HBC}}{S_{\Delta HCA}} + 1\right) +$$

$$+\left(1 + \frac{S_{\Delta HBC}}{S_{\Delta HAB}} + \frac{S_{\Delta HCA}}{S_{\Delta HAB}}\right) - 3$$

$$= \left(\frac{S_{\Delta HAB}}{S_{\Delta HBC}} + \frac{S_{\Delta HBC}}{S_{\Delta HAB}}\right) + \left(\frac{S_{\Delta HAB}}{S_{\Delta HCA}} + \frac{S_{\Delta HCA}}{S_{\Delta HAB}}\right) + \left(\frac{S_{\Delta HCA}}{S_{\Delta HBC}} + \frac{S_{\Delta HBC}}{S_{\Delta HCA}}\right)$$

$$\overset{Cosi}{\geq} 2+2+2=6, \text{ đpcm.}$$

Chú ý: Nếu ΔABC có góc tù, chẳng hạn $\hat{A} > 90^0$, ta không có:

$$S_{HBC} + S_{HAC} + S_{HAB} = S$$

nên kết luận của bài toán không đúng, bởi khi đó ta có:

$$S_{HBC} - S_{HAC} - S_{HAB} = S,$$

do đó:

$$\frac{HA'}{AA'} - \frac{HB'}{BB'} - \frac{HC'}{CC'} = 1.$$

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Viết công thức tính diện tích của tam giác. Hãy giải thích công thức tính diện tích tam giác vuông đã học ở tiết trước.

Câu hỏi 2: Tính diện tích tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng a.

Câu hỏi 3: Tính diện tích tam giác đều có cạnh huyền bằng a.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho ΔABC, đường trung tuyến AM, BN.

a. Chứng minh rằng $S_{\Delta AMB} = S_{\Delta AMC}$.

b. Tính diện tích của ΔABN, biết diện tích ΔABC bằng S.

Bài tập 2. Cho ΔABC vuông tại A có cạnh huyền BC = 6cm. Các tia phân giác các góc B và C cắt nhau tại I, khoảng cách từ I đến BC bằng 1cm.

a. Tính diện tích ΔIBC.

b. Tính diện tích ΔABC.

Bài tập 3. Tính diện tích hình chữ nhật ABCD biết đường chéo bằng 4cm, góc nhọn tạo bởi hai đường chéo bằng 30^0.

Bài tập 4. Cho ΔABC đường cao AH = 4cm, biết BC = 6cm.

a. Tính diện tích ΔABC.

b. Cắt ΔABC thành ba mảnh để ghép lại thành một hình chữ nhật. Tính diện tích của mỗi mảnh.

Bài tập 5. Hình thang ABCD (AB // CD) có các đường chéo cắt nhau tại O.

a. Chứng minh rằng $S_{AOD} = S_{BOC}$.

b. Qua O kẻ đường thẳng song song với AB, cắt AD và BC theo thứ tự tại M và N. Chứng minh rằng OM = ON.

Bài tập 6. Cho ΔABC đều, M là một điểm bất kì nằm trong tam giác. Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ M đến ba cạnh của tam giác ABC bằng đường cao của tam giác ấy.

Bài tập 7. Cho ΔABC có diện tích S, các trung tuyến ADBE, CF cắt nhau tại G, chia ΔABC thành sáu tam giác nhỏ. Tính diện tích mỗi tam giác nhỏ đó.

Bài tập 8. Hai đường chéo của hình bình hành chia hình bình hành thành bốn tam giác. Chứng minh rằng bốn tam giác đó có diện tích bằng nhau.

Bài tập 9. Cho ΔABC, diện tích bằng S, các đường cao h_a, h_b, h_c. CMR ΔABC đều khi và chỉ khi:

$$S=\frac{1}{6}(a.h_b+b.h_c+c.h_a).$$

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1. *Học sinh tự vẽ hình.*

a. Kẻ đường cao AH, khi đó:

$$S_{\Delta AMB}=\frac{1}{2}AH.BM=\frac{1}{2}AH.CM=S_{\Delta AMC}, \text{ dpcm.}$$

b. Chứng minh tương tự như câu a), ta có:

$$S_{\Delta ANB}=S_{\Delta CNB}.$$

Theo giả thiết:

$$S=S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ANB}+S_{\Delta CNB}=2S_{\Delta ANB}\Leftrightarrow S_{\Delta ANB}=\frac{S}{2}.$$

Bài toán 3

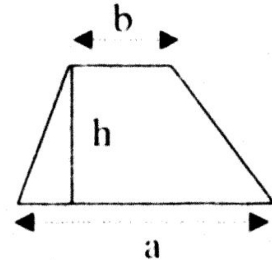
DIỆN TÍCH HÌNH THANG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. CÔNG THỨC TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH THANG

Ta có kết quả:

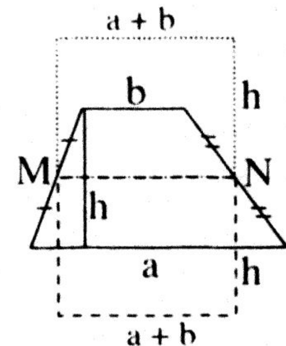
> *Diện tích hình thang bằng nửa tích của tổng hai đáy với chiều cao*
>
> $$S = \frac{1}{2}(a + b).h.$$



Nhận xét: 1. Ta thấy ngay rằng:

$$S = \frac{1}{2}(a + b).h.$$

cũng chính bằng diện tích của hình chữ nhật có hai cạnh là $\frac{1}{2}(a + b)$ (đây chính là độ dài đường trung bình) và h. Điều này giúp chúng ta giải thích được rằng qua MN dựng được hai hình chữ nhật có cùng diện tích với hình thang ABCD.



2. Cũng từ đó chúng ta thấy rằng, chỉ cần biết độ dài đường trung bình (không cần độ dài hai đáy) và độ dài đường cao của hình thang thì suy ra được diện tích của nó.

Thí dụ 1: Tính diện tích hình thang ABCE theo các độ dài trên hình vẽ, biết rằng diện tích hình chữ nhật ABCD bằng $12cm^2$.

Giải

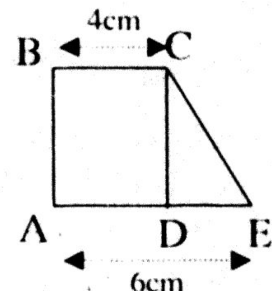
Giả sử AB = a, khi đó:

$S_{ABCD} = 12 = BC.AB = 4a$

$\Leftrightarrow a = 3cm.$

Khi đó, diện tích hình thang ABCE được cho bởi:

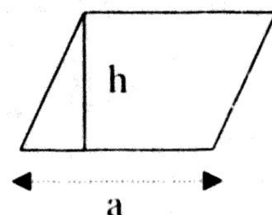
$S_{ABCE} = \frac{1}{2}(BC + AE).AB = \frac{1}{2}(4 + 6).3 = 15cm^2.$



2. CÔNG THỨC TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH BÌNH HÀNH

Ta có kết quả:

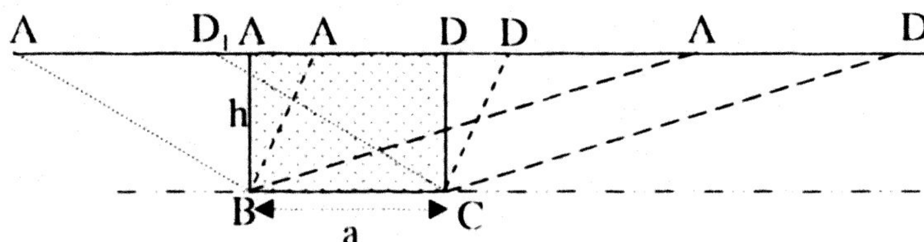
> *Diện tích hình bình hành bằng nửa tích của một cạnh với chiều cao tương ứng với cạnh đó*
>
> $$S = a.h.$$



Nhận xét: 1. Ta thấy ngay rằng:

$$S = a.h.$$

cũng chính bằng diện tích của hình chữ nhật có hai cạnh là a và h. Điều này giúp chúng ta giải thích được tại sao hình chữ nhật cùng với các hình bình hành trong hình sau có diện tích bằng nhau:

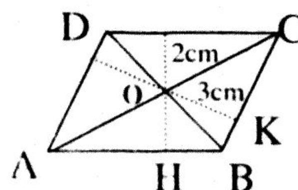


2. Như vậy, một hình chữ nhật và một hình bình hành đều có hai cạnh là a và b thì hình chữ nhật có diện tích lớn hơn - *Đề nghị bạn đọc chứng minh nhận xét này.*

Thí dụ 2: Hình bình hành có diện tích bằng $24cm^2$. Khoảng cách từ giao điểm của hai đường chéo đến các cạnh của hình bình hành bằng 3cm và 2cm. Tính chu vi của hình bình hành đó.

Giải

Giả sử AB = a, BC = b, ta có:



$$S_{ABCD} = 4S_{\Delta OAB} = 4.\frac{1}{2}OH.AB = 4a = 24$$

$$\Rightarrow a = 6cm.$$

$$S_{ABCD} = 4S_{\Delta OBC} = 4.\frac{1}{2}OK.BC = 6b = 24$$

$$\Rightarrow b = 4cm.$$

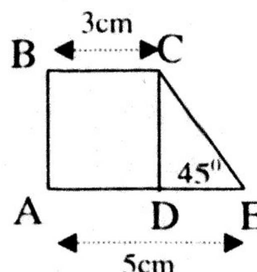
Vậy, chu vi hình bình hành ABCD bằng:

$$CV_{ABCD} = 2(AB + BC) = 20cm.$$

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Tính diện tích hình thang vuông, biết hai đáy có độ dài là 3cm và 5cm, góc tạo bởi một cạnh bên và đáy lớn có số đo bằng 45^0.

Giải



Trong ΔCDE vuông có $\hat{E} = 45^0$, suy ra:

$$CD = DE = AE — BC = 5 — 3 = 2cm = AB.$$

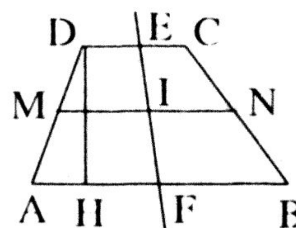
Khi đó, diện tích hình thang ABCE được cho bởi:

$$S_{ABCE} = \frac{1}{2}(BC + AE).AB = \frac{1}{2}(3 + 5).2 = 8cm^2.$$

Ví dụ 2: Chứng minh rằng mọi đường thẳng đi qua trung điểm của đường trung bình của hình thang và cắt hai đáy hình thang sẽ chia hình thang đó thành hai hình thang có diện tích bằng nhau.

Giải

Từ giả thiết, ta có nhận xét rằng:



$$MI = NI = \frac{1}{2}MN,$$

$$MN = \frac{1}{2}(AB + CD),$$

$$MI = \frac{1}{2}(AF + DE),\ NI = \frac{1}{2}(BF + CE).$$

Tới đây chúng ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1: Ta có:

$$S_{ADEF} = \frac{1}{2}(AF + DE).DH = MI.DH = \frac{1}{2}MN.DH$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{1}{2}(AB + CD).DH = \frac{1}{2}S_{ABCD},$$

$$S_{BCEF} = S_{ABCD} - S_{ADEF} = S_{ABCD} - \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{2}S_{ABCD},$$

$$\Rightarrow S_{ADEF} = S_{BCEF}.$$

Cách 2: Ta có:

$$S_{ADEF} = \frac{1}{2}(AF + DE).DH = MI.DH = NI.DH$$

$$= \frac{1}{2}(BF + CE).DH = S_{BCEF}.$$

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Viết công thức tính diện tích hình thang, diện tích hình bình hành.

Câu hỏi 2: Tính diện tích hình thang có đường trung bình bằng 6cm, chiều cao tương ứng bằng 8cm.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Tính diện tích hình thang vuông, biết hai đáy có độ dài là 7cm và 9cm và Góc tạo bởi một cạnh bên và đáy lớn có số đo bằng:

a. 45^0.

b. 30^0.

c. 60^0.

Bài tập 2. Hình bình hành có diện tích bằng $24cm^2$. Khoảng cách từ giao điểm của hai đường chéo đến các cạnh của hình bình hành bằng 3cm và 4cm. Tính chu vi của hình bình hành đó.

Bài tập 3. Hai cạnh của hình bình hành có độ dài bằng 4cm và 6cm. Một trong các đường cao có độ dài bằng 3cm. Tính độ dài đường cao thứ hai.

Bài tập 4. Hình thang cân ABC (AB // CD) có AC vuông góc với BD tại O, AB = 4cm, CD = 8cm.

a. Chứng minh rằng các tam giác ΔOCD, ΔOAB vuông cân.

b. Tính diện tích hình thang ABCD.

Bài tập 5. Cho ΔABC có BC = 20cm, đường cao AH = 12cm. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, AC.

a. Tứ giác BMNC là hình gì ? Vì sao ?

b. Tính diện tích tứ giác BMNC.

Bài tập 6. Cho hình chữ nhật có kích thước a và b, cho hình bình hành có kích thước a và b. Tính góc nhọn của hình bình hành nếu diện tích của nó bằng một nửa diện tích của hình chữ nhật.

Bài tập 7. Hình thang ABCD (AB // CD) có AB = 4cm, đường cao bằng 5cm. Biết rằng đường thẳng đi qua B và song song với AD chia hình thang thành một hình bình hành và một tam giác có diện tích bằng nhau. tính diện tích hình thang.

Bài tập 8. Cho hình thang ABCD (AB // CD), M là trung điểm của BC. Đường thẳng đi qua M và song song với AD cắt các đường thẳng AB, CD theo thứ tự ở E, F. Biết AD = 6cm, khoảng cách từ M đến AD bằng 3cm.

a. Tính diện tích tứ giác ADFE.

b. Tính diện tích hình thang ABCD.

Bài toán 4

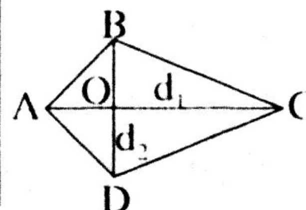
DIỆN TÍCH HÌNH THOI

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. CÔNG THỨC TÍNH DIỆN TÍCH CỦA TỨ GIÁC CÓ HAI ĐƯỜNG CHÉO VUÔNG GÓC VỚI NHAU

Ta có kết quả:

> *Diện tích của tứ giác có hai đường chéo vuông góc với nhau bằng nửa tích của hai đường chéo*
>
> $$S = \frac{1}{2}d_1.d_2.$$



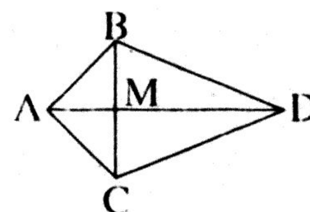
Thí dụ 1: Cho ΔABC cân tại A, trung tuyến AM. Kéo dài AM về phía M lấy điểm D sao cho AD = 3AM. Tính diện tích tứ giác ABDC, biết AB = 5cm, BC = 6cm.

Giải

Vì ΔABC cân tại A nên trung tuyến AM là đường cao. Trong ΔMAB vuông tại M, ta có:

$$MA = \sqrt{AB^2 - MB^2} = \sqrt{25 - 9} = 4cm$$

$\Rightarrow AD = 12cm.$



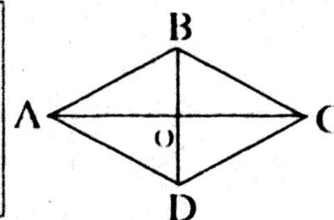
Khi đó, diện tích tứ giác ABDC được cho bởi:

$$S = \frac{1}{2}AD.BC = \frac{1}{2}.12.6 = 36cm^2.$$

2. CÔNG THỨC TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH THOI

Ta có kết quả:

> *Diện tích của hình thoi bằng nửa tích của hai đường chéo*
>
> $$S = \frac{1}{2}d_1.d_2.$$

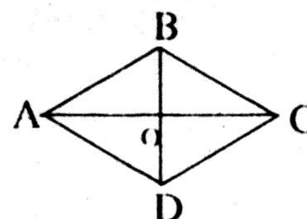


Thí dụ 2: Cho hình thoi ABCD, O là giao điểm của hai đường chéo, biết AB = 5cm, OA = 4cm. Hãy tính diện tích của hình thoi ABCD.

Giải

Trong ΔOAB vuông tại O, ta có:

$$OB = \sqrt{AB^2 - OA^2} = \sqrt{25 - 16} = 3cm.$$



Khi đó, diện tích hình thoi ABCD được cho bởi:

$$S = \frac{1}{2}AC.BD = \frac{1}{2}.2OA.2OB = 2.4.3 = 24cm^2.$$

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Hai đường chéo của hình thoi có độ dài bằng 12cm và 16cm. Hãy tính:

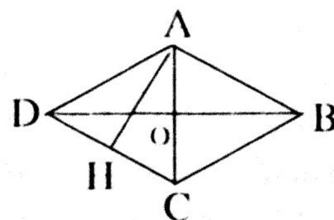
a. Diện tích hình thoi.

b. Độ dài cạnh hình thoi.

c. Độ dài đường cao hình thoi.

Giải

a. Ta có:



$$S = \frac{1}{2}AC.BD = \frac{1}{2}.12.16 = 96cm^2.$$

b. Trong ΔOAB vuông tại O, ta có:

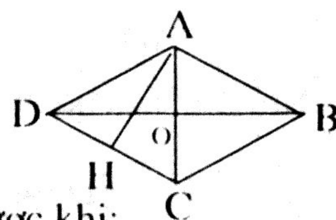
$$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{\frac{1}{4}AC^2 + \frac{1}{4}BD^2} = 10cm.$$

c. Ta có:

$$S = AH.CD = 10AH = 96 \Leftrightarrow AH = 9,6cm.$$

Ví dụ 2: Trong những hình thoi có độ dài cạnh bằng a, hãy tìm hình thoi có diện tích lớn nhất.

Giải



Xét hình thoi ABCD, kẻ $AH \perp CD$, ta có:

$AH \le AD = a.$

$S_{ABCD} = CD.\ AH \le CD.AD = a.\ a = a^2.$

Vậy, diện tích hình thoi lớn nhất bằng a^2, đạt được khi:

$AH = AD \Leftrightarrow H \equiv D \Leftrightarrow ABCD$ là hình vuông.

Ví dụ 3: Cho hình thang cân ABCD (AB // CD) có AC = 6cm, $\widehat{BDC} = 45^0$. Tính diện tích hình thang.

Giải

Xét hai tam giác ΔACD và ΔBDC, ta có:

$AD = BC,$

$\widehat{ADC} = \widehat{BCD},$

CD chung

suy ra $\Delta ACD = \Delta BDC$ (c.g.c), từ đó ta được:

$\widehat{ACD} = \widehat{BDC} = 45^0 \Rightarrow \Delta OCD$ vuông cân $\Rightarrow AC \perp BD.$

Khi đó, diện tích ABCD được cho bởi:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}.AC.BD = \frac{1}{2}.6.6 = 18cm^2$$

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Viết công thức diện tích tứ giác có hai đường chéo vuông góc.

Câu hỏi 2: Tính diện tích hình thoi có các đường chéo bằng 8cm và 6cm.

Câu hỏi 3: Tính diện tích hình vuông có đường chéo bằng d.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho hình thoi ABCD, O là giao điểm của hai đường chéo. Hãy tính diện tích của hình thoi ABCD, biết:

a. AB = 5cm, OA = 3cm.

b. AB = 8cm, OA = 6cm.

Bài tập 2. Hai đường chéo của hình thoi có độ dài bằng 8cm và 6cm. Hãy tính:

b. Diện tích hình thoi.

c. Độ dài cạnh hình thoi.

d. Độ dài đường cao hình thoi.

Bài tập 3. Hình chữ nhật ABCD có AB = 6cm, AD = 4cm. Qua mỗi đỉnh của hình chữ nhật, vẽ đường thẳng song song với đường chéo hình chữ nhật, các đường thẳng đó cắt nhau tạo thành một tứ giác. Tính diện tích tứ giác ấy.

Bài tập 4. Tính diện tích hình thoi có cạnh bằng a, và:

a. Góc nhọn của hình thoi bằng 45^0.

b. Góc tù của hình thoi bằng 150^0.

Bài tập 5. Tính diện tích lục giác đều ABCDEF biết AD = 2a, BF = 2b.

Bài tập 6. Tứ giác ABCD có diện tích $30cm^2$, điểm I thuộc cạnh AB. Qua A kẻ đường thẳng song song với ID, cắt CD ở E. Qua B kẻ đường thẳng song song với IC, cắt CD ở F.

a. Tính diện tích tam giác IEF.

b. Gọi M là trung điểm của EF. Tính diện tích tứ giác AIMD.

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1. Tham khảo thí dụ 2.

Bài tập 2. Tham khảo ví dụ 1.

ÔN TẬP CHƯƠNG II

Bài tập 1. Hình bình hành ABCD có AD = 3cm, AB = 6cm. Gọi I, theo thứ tự là trung điểm của AB. CD.

a. Chứng minh rằng $\widehat{DIC} = 90^0$, $\widehat{AKB} = 90^0$.

b. Gọi M là giao điểm của AK và DI, gọi N là giao điểm của BK và CI. Tứ giác IMKN là hình gì? Chứng minh.

c. Chứng minh rằng các tứ giác IMKN và ABCD có chung một tâm đối xứng.

d. Dựng hình bình hành ABCD nói trên biết rằng IK là tia phân giác của góc DIC.

e. Tính diện tích tứ giác IMKN biết IK là tia phân giác của góc DIC.

Bài tập 2. Về một phía của đoạn thẳng AB có độ dài a, vẽ hai hình vuông AMNP và MBKL, với M là một điểm tuỳ ý thuộc đoạn thẳng AB. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng nối tâm của hai hình vuông trên. Tìm tập hợp các điểm I khi M thay đổi trên đoạn AB.

Bài tập 3. Cho hai hình bình thành, mỗi cạnh của hình thứ nhất chứa một đỉnh của hình thứ hai. Chứng minh rằng hai hình bình hành đó có cùng một tâm đối xứng.

Bài tập 4. Trên các cạnh của hình vuông ABCD và ở miền ngoài của hình vuông đó, vẽ bốn hình vuông. Chứng minh rằng các tâm của bốn hình vuông đó là đỉnh của một hình vuông.

Bài tập 5. Cho ΔABC với ba đường cao AA_1, BB_1, CC_1. Gọi H là trực tâm của tam giác đó. Chứng minh rằng:

$$\frac{HA_1}{AA_1} + \frac{HB_1}{BB_1} + \frac{HC_1}{CC_1} = 1.$$

Bài tập 6. Cho ΔABC.

a. Tính tỉ số các đường cao BB_1 và CC_1 xuất phát từ các đỉnh B và C.

b. Chứng minh rằng: nếu AB < AC thì $BB_1 < CC_1$.

Bài tập 7. Qua tâm O của hình vuông ABCD cạnh a, kẻ đường thẳng d cắt cạnh AB và CD lần lượt tại M và N. Biết MN = b. Hãy tính tổng các khoảng cách từ các đỉnh của hình vuông đến đt d theo a và b. Biết a và b có cùng đơn vị đo.

Bài tập 8. ΔABC có hai trung tuyến AM và BN vuông góc với nhau. Hãy tính diện tích ΔABC theo AM và BN.

Bài tập 9. Cho hình bình hành ABCD. Gọi K và L là hai điểm thuộc cạnh BC sao cho BK = KL = LC. Tính tỉ số diện tích của:

a. ΔDAC và ΔDCK.

b. ΔDAC và tứ giác ADLB.

c. Tứ giác ABKD và tứ giác ABLD.

Bài tập 10. Cho ΔABC vuông tại A có $BC = 2AB = 2a$. ở phía ngoài tam giác, vẽ hình vuông BCDE, tam giác đều ABF và tam giác đều ACG.

a. Tính các góc B, C, cạnh AC và diện tích ΔABC.

b. Chứng minh rằng FA vuông góc với BE và CG. Tính diện tích các tam giác FAG và FBE.

c. Tính diện tích tứ giác DEFG.

Bài tập 11. Cho hình chữ nhật ABCD và điểm M thuộc cạnh AB. Chứng minh rằng diện tích ΔMCD bằng nửa diện tích hình chữ nhật ABCD.

Bài tập 12. Cho hình chữ nhật ABCD, AB = 5cm, BC = 8cm. Trên hai cạnh BC và CD ở bên ngoài hình chữ nhật dựng các hình vuông BCPQ và DCMN. Gọi O_1 và O_2 lần lượt là tâm các hình vuông này.

a. Chứng minh O_1, C, O_2 thẳng hàng.

b. Tính diện tích hình vuông có các cạnh là O_1O_2.

Bài tập 13. Cho hình bình hành ABCD, E là giao điểm của hai đường chéo, I là một điểm trên AD sao cho $\frac{ID}{AD} = \frac{1}{4}$. Tính diện tích hình bình hành ABCD, biết diện tích $\Delta EDI = 3cm^2$.

Bài tập 14. Cho ΔABC. Tìm điểm M trong tam giác thỏa mãn một trong các điều kiện sau:

a. $S_{ABM} = S_{ACM} + S_{BCM}$.

b. Từ M nối đến ba đỉnh ta được ba tam giác có diện tích bằng nhau.

Bài tập 15. Trên hai cạnh AC và BC của ΔABC lần lượt lấy các điểm M và K , AK và BM cắt nhau tại O. Tính diện tích ΔCMK nếu diện tích các ΔOAM, ΔOAB và ΔOBK theo thứ tự là S_1, S_2, S_3.

Bài tập 16. Cho hình thang ABCD, BC // AD, AD = 2BC và có diện tích $30cm^2$. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho AM : BM = 2 : 3. Trên cạnh CD lấy điểm N sao cho đoạn thẳng MN chia hình thang thành hai phần mà diện tích phần này gấp ba lần diện tích phần kia.

a. Tính S_{ABD}, S_{AMD}.

b. Tính S_{MNC} và S_{MND} suy ra tỉ số $\frac{CN}{DN}$.

Bài tập 17. Cho ΔABC vuông tại A và điểm H di chuyển trên BC. Gọi E và F lần lượt là điểm đối xứng của điểm H qua AB và AC.

a. Chứng minh E, A, H thẳng hàng.

b. Chứng minh BEFC là hình thang. Có thể tìm vị trí của H để BEFC trở thành hình thang vuông, hình bình hành, hình chữ nhật được không ?

c. Xác định vị trí của điểm H để ΔEFH có diện tích lớn nhất.

Bài tập 18. Cho hình chữ nhật ABCD, d_1 và d_2 là các trục đối xứng (d_1 // BC, d_2 // AB). Lấy K và M thuộc d_1L và N thuộc d_2 sao cho KN đi qua A, KL đi qua B, ML đi qua C. Chứng minh rằng MN đi qua D và KLMN là hình thoi. Trong trường hợp nào thì KLMN là hình vuông?

Bài tập 19. Cho hình vuông ABCD, ba điểm P, P_1, P_2 lần lượt thuộc các cạnh CD, AB, BC sao cho PP_1 // CB, PP_2 // AC. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng $\widehat{POP_2} = 90^0$.

Bài tập 20. Tổng tất cả các góc trong và một trong các góc ngoài của một đa giác có số đo là 2225^0. Hỏi đa giác đó có bao nhiêu cạnh ?

Bài tập 21. Các điểm E, F, G, H, K, L, N, M chia mỗi cạnh hình vuông ABCD thành ba đoạn bằng nhau. Gọi P, Q và S, R lần lượt là giao điểm của EH và MK với FN và GL (h.78). Tính diện tích của ngũ giác AEPSM và của tứ giác PQRS biết AB = 7cm.

Bài tập 22. Cho hình bình hành ABCD. Vẽ bốn đường thẳng nối lần lượt các đỉnh A, B, C, D với các trung điểm P, Q, R, S của CD, AD, AB, BC. Chứng minh rằng tứ giác tạo bởi các đường thẳng này có diện tích bằng $\frac{1}{5}$ diện tích hình bình hành ABCD.

Bài tập 23. Cho hình thang ABCD (AB // CD). Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, CD. Gọi O là trung điểm của EF. Qua O kẻ đường thẳng song song với AB, cắt AD và BC theo thứ tự ở M và N.

a. Tứ giác EMFN là hình ? Chứng minh.

b. Hình thang ABCD có thêm điều kiện gì thì EMFN là hình thoi?

Bài tập 24. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn (AC > AB), đường cao AH. Gọi D, E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, AC, BC.

a. Xác định dạng của tứ giác BDEF, DEFH.

b. Tính diện tích các tứ giác BDEF, DEFH biết HB = 4cm, HC = 6cm, AH = 8cm.

Bài tập 25. Cho tam giác ABC, các trung tuyến BD và CE cắt nhau ở G. Gọi I, K theo thứ tự là trung điểm của GB, GC.

a. Tứ giác DEIK là hình gì? Chứng minh

b. Tính diện tích tứ giác DEIK biết BD vuông góc với CE và BD = CE = 12cm.

PHỤ LỤC
SỬ DỤNG MÁY TÍNH CASIO FX - 570MS GIẢI TOÁN 8

Nội dung của phần phụ lục này được tóm tắt từ cuốn " **HƯỚNG DẪN SỬ DỤNG MÁY TÍNH CASIO FX - 570MS** " - NXB Hà Nội 2005, do đó nếu bạn đọc muốn có được tài liệu chi tiết và cụ thể hơn hãy tìm đọc hai cuốn sách:

Cuốn 1: Hướng dẫn sử dụng máy tính CASIO fx - 570 MS

Cuốn 2: Sử dụng máy tính CASIO fx - 570 MS giải toán THCS

1 - BẬT MÁY – TẮT MÁY

1. Để bật máy tính ấn phím [ON].
2. Để tắt máy tính ấn nhóm phím [SHIFT] [AC].

Lưu ý rằng, máy tính có cài đặt chế độ tự động tắt.

2 - TÍNH TOÁN VỚI SỐ NGUYÊN VÀ SỐ TỰ NHIÊN

Các phép toán này được thực hiện trong Mode COMP, nó được thiết lập bằng cách ấn các phím:

[MODE] [1].

Ví dụ 1:

a. Tính 5×(9 + 7) , ta ấn:

5 [×] [(] 9 [+] 7 [)] [=] — 80

b. Tính 5×(2×6 + 3×4), ta ấn:

5 [×] [(] 2 [×] 6 [+] 3 [×] 4 [)] [=] — 120

Chú ý: Có thể bỏ qua dấu) trước khi ấn phím [=], thật vậy:

5 [×] [(] 2 [×] 6 [+] 3 [×] 4 [=] — 120

Ví dụ 2:

a. Tính 3×(5 - 2×3) , ta ấn:

3 [×] [(] 5 [−] 2 [×] 3 [)] [=] — -1

b. Tính (8 - 5)×(6 — 8:4), ta ấn:

[(] 8 [−] 5 [)] [×] [(] 6 [−] 8 [÷] 4 [)] [=] — 12

Ví dụ 3:

a. Tính 18^2 , ta ấn:

18 [x^2] [=] — 324

hoặc ấn 18 [^] 2 [=] — 324

b. Tính 6^3, ta ấn:

6 [SHIFT] [x^3] [=] → 216

hoặc ấn 6 [^] 3 [=] → 216

c. Tính 7^4, ta ấn:

7 [^] 4 [=] → 2401

d. Tính $-4\times(3^2 - 2^3 + 5^4)$, ta ấn:

[(-)] 4 [×] [(] 3 [x^2] [-] 2 [SHIFT] [x^3] [+] 5 [^] 4 [)] [=] → -2504

Nhóm Cự Môn chúng tôi đã và đang theo đuổi mục tiêu viết ra được một bộ giáo trình Toán phổ thông (PTCS và PTTH) với nội dung bao gồm:

1. *Đầy đủ các kiến thức theo quy chuẩn của BGD và ĐT.*
2. *Kiến thức được trình bày theo kiểu đặt vấn đề và các yêu cầu hành động để thay đổi kiểu dạy học theo lối thụ động.*
3. *Sau mỗi chủ đề kiến thức đều có phần hướng dẫn sử dụng máy tính Casio Fx570 Ms hoặc các phần mềm máy vi tính để trợ giúp cho việc giải toán (giảm thiểu các bài toán tính toán phức tạp).*
4. *Những chủ đề kiến thức cần thiết sẽ được chia nhỏ thành phần lý thuyết và các dạng toán để giúp cho việc dạy và học nâng cao.*
5. *Có đĩa CD kèm theo để:*
   - *Giáo viên có thể thực hiện bài giảng bằng máy chiếu.*
   - *Học sinh có thể học ngay trên máy tính.*

Do vậy, chúng tôi rất mong nhận được những ý kiến đóng góp có tính xây dựng của tất cả các Thày giáo, Cô giáo, Nhà nghiên cứu, Phụ huynh và Học sinh trên toàn quốc.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Sách giáo khoa Toán 8 - Nhà xuất bản Giáo dục.
2. Sách giáo khoa Bài tập Toán 8 - Nhà xuất bản Giáo dục.
3. Vũ Hữu Bình - Toán cơ bản và nâng cao Hình học 8 - Nhà xuất bản Đà Nẵng.
4. Vũ Hữu Bình - Toán cơ bản và nâng cao Đại số 8 - Nhà xuất bản Đà Nẵng.
5. Tôn Thân - Hướng dẫn làm bài tập hình học 8 - Nhà xuất bản Giáo dục.
6. Nguyễn Đức Tấn - Giải bằng nhiều cách các bài toán 8 - Nhà xuất bản Tổng hợp Thành phố Hồ Chí Minh.
7. Nguyễn Đức Chí - Ôn tập và kiểm tra toán 8 - Nhà xuất bản Tổng hợp Thành phố Hồ Chí Minh.
8. Nguyễn Ngọc Đạm, Nguyễn Quang Vinh, Ngô Long Hậu - Kiến thức cơ bản và nâng cao toán 8 - Nhà xuất bản Hà Nội.

LỜI CUỐI

Nhóm Cự Môn luôn sẵn lòng giải đáp mọi thắc mắc của các em học sinh và độc giả về nội dung của cuốn tài liệu này.

Mọi chi tiết xin liên hệ trực tiếp tới:

TRUNG TÂM HỖ TRỢ PHỔ CẬP SÁCH TOÁN

THCS VÀ THPT

VỚI ƯU ĐÃI CỦA NHÓM CỰ MÔN

Chịu trách nhiệm chính: **Thạc sĩ Toán học - Kỹ sư Tin học Lê Hồng Đức.**

Các thành viên chính thức của nhóm:

1. Nhà giáo ưu tú Đào Thiện Khải - Nguyên Hiệu Trưởng Trường THPT Hà Nội - Amsterdam.
2. Lê Hữu Trí.
3. Lê Bích Ngọc.

Phổ cập phương pháp dạy và học

" LẤY HỌC TRÒ LÀM TRUNG TÂM "

Địa chỉ: Số nhà 20 Ngõ 86 - Đường Tô Ngọc Vân - Quận Tây Hồ - Hà Nội
Điện thoại: (04) 7196671 hoặc 0983046689
E-mail: cumon@hn.vnn.vn hoặc lehongduc39@yahoo.com

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại : (04) 9 714898 – (04) 9 724770 – Fax: (04) 9 714899

Chịu trách nhiệm xuất bản

Giám đốc : PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập : NGUYỄN BÁ THÀNH

Biên tập
Minh Hải

Chế bản
NS. Bình Thạnh

Trình bày bìa
Xuân Duyên

Tổng phát hành : Công ty TNHH DỊCH VỤ VĂN HÓA KHANGVIỆT
Địa chỉ : 374 Xô Viết Nghệ Tĩnh P.25 – Q.BT – TP.HCM
ĐT: 5117907 – Fax: 8999898
Email: binhthanhbookstore@yahoo.com

ĐỂ HỌC TỐT TOÁN 8 TẬP 1
Mã số : 1L – 218 ĐH2007
In 3.000 cuốn, khổ 16×24 cm, tại Công ty in VIỆT HƯNG.
Số xuất bản : 729 – 2007/CXB/15 – 111/ĐHQGHN ngày 07/09/2007.
Quyết định xuất bản số : 486 LK/XB
In xong và nộp lưu chiểu quý IV năm 2007.